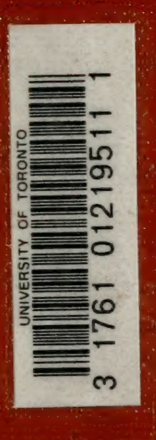

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01219511 1

COURS D'ANALYSE INFINITÉSIMALE

COURS

d'Analyse Infinitésimale

PAR

Ch.-J. de la Vallée Poussin
Professeur à l'Université de Louvain
Correspondant de l'Académie Royale de Belgique

TOME I

LOUVAIN
A. Uystpruyst-Dieudonné
ÉDITEUR
10, rue de la Monnaie, 10.

PARIS
Gauthier-Villars
ÉDITEUR
55, Quai des Grands Augustins, 55.

1903

PRÉFACE.

Cet ouvrage est destiné aux élèves qui suivent les cours d'analyse infinitésimale à l'Université de Louvain. Il doit servir en même temps aux futurs ingénieurs et aux élèves qui se préparent au doctorat.

Pour répondre à ce double but, nous avons adopté deux textes différents. Un grand texte qui s'adresse aux débutants et un petit texte qui apporte au précédent tous les compléments nécessaires pour les études supérieures. Dans le grand texte, les questions sont abordées sous leur forme la plus élémentaire mais sans jamais sacrifier la rigueur. Elles sont reprises ensuite dans le petit texte et examinées avec tous les développements qu'elles comportent et sous leur point de vue le plus général. Cette manière de procéder peut amener certaines redites, mais elle a l'avantage d'être plus conforme au développement naturel de la science et de faciliter l'intelligence des démonstrations les plus abstraites. D'ailleurs la comparaison des diverses méthodes les éclaircit les unes et les autres et est toujours très utile.

La plupart des chapitres ont été complétés par des exercices. Quelques-uns sont de simples applications des théories exposées. Le plus grand nombre constituent le prolongement du cours. Ils donnent sous une forme très concise les résultats les plus classiques et les plus utiles à connaître. Ils sont toujours accompagnés des indications strictement nécessaires pour que leur solution soit facile à compléter.

Ce premier volume comprend, dans son grand texte, les matières du cours de première année. Nous nous sommes

surtout occupés des fonctions d'une variable réelle. Ce sont celles par lesquelles il convient de commencer et c'est le sens de la réalité seul qui intéresse les ingénieurs. Les variables complexes ont été écartées de toutes les questions de géométrie et nous avons attaché une grande importance aux discussions de signes. Nous avons donné dans le petit texte une part considérable à l'étude des principes généraux de chaque théorie. Ces questions prennent, en effet, une importance de plus en plus considérable dans les études ultérieures.

Le second volume que nous espérons publier prochainement sera consacré aux intégrales multiples, aux équations différentielles, aux applications géométriques qui n'ont pas trouvé place dans celui-ci et aux fonctions d'une variable complexe.

Parmi les ouvrages dont nous avons tiré le plus de profit, nous signalons le *Cours d'analyse* de M. C. Jordan, celui de notre ancien maître Ph. Gilbert, si remarquable par ses qualités d'exposition, et aussi les *Leçons sur les applications géométriques de l'analyse* par M. Raffy. Les excellents recueils de Frenet et Tisserand nous ont également fourni un bon nombre d'exercices précieux.

Ch.-J. de la Vallée Poussin.

Louvain, le 1er août 1902.

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES

Les nombres entre parenthèses désignent les numéros du cours.

INTRODUCTION

CHAPITRE I

Dérivation des fonctions explicites d'une variable.

CHAPITRE II

Formule de Taylor. Applications diverses.

CHAPITRE III

Fonctions de plusieurs variables.

CHAPITRE IV

Fonctions implicites. Changements de variables.

CHAPITRE V

Intégrales indéfinies. Méthodes classiques d'intégration.

CHAPITRE VI

Intégrales définies.

CHAPITRE VII

Formules fondamentales de la théorie des courbes planes.

CHAPITRE VIII

Formules fondamentales de la théorie des surfaces et des courbes gauches.

CHAPITRE IX

Calcul des aires, des arcs et des volumes.
Evaluation approchée des intégrales définies.

CHAPITRE X

Des séries

ERRATA

Pages	*Lignes*	*au lieu de*	*lisez*
11	32	α_r	α^r
13	27	la partie	les parties
15	35-36	ou sin x	arc sin x
16	24-25	l'oscillation sera égale à $M - m$ dans un au moins des intervalles partielles et elle	la somme des oscillations dans les intervalles partiels sera au moins égale à $M - m$, et l'oscillation
23	9	le déterminer	la déterminer
26	13	$a^{-\alpha}$,	$x^{-\alpha}$
32	10	$f(z) =$	$f(z)$
33	25	$d(x)$	$df(x)$
37	1	$x'' - x$	$x'' - x'$
61	18	$= (-1)^{n-1}$	$= \frac{1}{2i}(-1)^{n-1}$
64	15	voir nº 90	voir nº 92
73	4	$(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^n$	$(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1}$
78	15	$a_k e^{au}$	$a^k e^{au}$
90	5	$(z-a)^\beta$	$(z-b)^\beta$
102	23	$\frac{\partial u^2}{\partial^2 u}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial u^2}$
106	dernière	$'f$	$''f$
131	14	λ'''	$\lambda_{'''}$
143	7	avant	ayant
158	4	nº 172	nº 173
159	4	$\frac{M}{\mathfrak{F}^n}$	$\frac{M}{\mathfrak{F}^{n-1}}$
—	7	(7)	(9)
—	18	nº 67	nº 167
161	2	$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$	$\int \frac{x^{-\frac{1}{6}}dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$
163	9	on tire	on en tire
166	22	également différents	égalem. (sauf p) différents
167	12	$R(t, tq)$	$R(t, tq)$
—	dernière	Lionville	Liouville

Pages	*Lignes*	*au lieu de*	*lisez*
168	17	$+b\frac{p+q+2}{q+1}$	$-b\frac{p+q+2}{q+1}$
—	23	$\frac{aq}{p+q+1}$	$\frac{ap}{p+q+1}$
—	24	$\frac{ap}{p+q+1}$	$\frac{aq}{p+q+1}$
170	14	$x=t$	$x^2=t$
176	26	et >0	est >0
—	27	$\frac{du}{\alpha^2+\beta^2u^3}=\frac{1}{\alpha\beta}$	$\frac{2\,du}{\alpha^2+\beta^2u^2}=\frac{2}{\alpha\beta}$
178	19	de binôme	du binôme
183	3	$+\frac{\sin 4x}{4}$	$-\frac{\sin 4x}{4}$
183	4	$-\sin x$	$\sin x$
—	17	$\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$	$\frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)}}$
193	26	inférieure	supérieure
206	20	de moyenne.	de la moyenne
208	20	$f(x)$	$f(x)\,dx$
255	6	p. 230	p. 236
281	avant-dernière	aiguiltes	aiguilles
301 ~~295~~	avant-dernière	$E_1(k,\varphi)$ $F_1(k,\varphi)$	$E(k,\varphi)$ $F(k,\varphi)$
307	20	supérieure	inférieure
315	2	quarable	quarrable
335	16	$x^{-\alpha}$ $\text{Log}^{-\alpha}x$	x^{α} $\text{Log}^{\alpha}x$
348	dernière	n° 349	350

COURS D'ANALYSE INFINITESIMALE

INTRODUCTION

§ 1. Nombres réels.

1. Nombres rationnels. — Les nombres entiers et les nombres fractionnaires positifs ou négatifs, y compris le nombre zéro, forment l'*ensemble des nombres rationnels*. Nous supposerons que l'on connait les propriétés les plus élémentaires de ces nombres et que l'on sait effectuer sur eux les quatre opérations fondamentales de l'arithmétique. Toutefois il y a lieu de rappeler ici les propriétés suivantes :

1° L'ensemble des nombres rationnels est *ordonné*, c'est-à-dire que de deux nombres rationnels différents a et b l'un est plus grand que l'autre, par exemple b est plus grand que a, ce qu'on écrit

$$a < b \text{ ou } b > a.$$

La notion d'ordre exprimée par cette relation se réduit d'ailleurs à cette seule propriété du signe d'inégalité que si a est $< b$ et $b < c$, on a aussi $a < c$.

2° Entre deux nombres rationnels différents a et b on peut toujours en intercaler une infinité d'autres $>$ que l'un et $<$ que l'autre. On dit qu'un ensemble de nombres qui jouit de cette propriété est un ensemble *dense* et cette propriété s'appelle la *densité*.

2. Nombres irrationnels. — L'introduction des nombres irrationnels repose sur les considérations suivantes :

Supposons que par un procédé quelconque, et nous allons en indiquer plusieurs, on ait partagé tous les nombres rationnels en deux classes, une classe inférieure $\mathcal{A}$ et une classe supérieure $\mathcal{B}$, telles que tout nombre a de la première soit $<$ que tout nombre b de la seconde. D'abord il est clair, ce partage étant fait, que, si le nombre a est de la classe $\mathcal{A}$, il en sera de même pour tout nombre $< a$ et que, si b est de la classe $\mathcal{B}$, il en sera encore de même pour tout nombre $> b$. Ce premier point admis, je dis que trois cas pourront se présenter :

1° La classe inférieure $\mathcal{A}$ renferme un nombre m plus grand que tous les autres de la même classe, de sorte que tout nombre $< m$ est de la

classe $\mathcal{A}$ et tout nombre $> m$ de la classe $\mathcal{B}$. Le nombre m sépare donc la classe $\mathcal{A}$ de la classe $\mathcal{B}$ et nous l'appelons le *nombre frontière* des deux classes.

2° La classe supérieure $\mathcal{B}$ renferme un nombre m plus petit que tous les autres de la même classe. Dans ce cas encore, m est la *frontière* des deux classes : tout nombre $< m$ est de la classe $\mathcal{A}$ et tout nombre $> m$ de la classe $\mathcal{B}$.

Ces deux premiers cas s'excluent l'un de l'autre, car s'il y avait deux nombres frontières différents m et m', tous les nombres compris entre m et m' seraient à la fois de la classe $\mathcal{A}$ et de la classe $\mathcal{B}$, ce qui est en contradiction avec la définition de ces classes. Donc, s'il y a un plus grand nombre dans la classe $\mathcal{A}$, il n'y en a pas de plus petit dans la classe $\mathcal{B}$, et réciproquement.

Ces deux premiers cas sont faciles à réaliser. Il suffit de se donner un nombre quelconque m, on range les nombres $< m$ dans la classe $\mathcal{A}$, les nombres $> m$ dans la classe $\mathcal{B}$. Le nombre m peut encore se ranger dans l'une ou dans l'autre. On obtient ainsi, à son choix, le premier ou le second des deux cas que nous venons d'examiner.

3° Enfin il peut se faire qu'il n'y ait ni de plus grand nombre dans la classe $\mathcal{A}$ ni de plus petit nombre dans la classe $\mathcal{B}$. Des considérations très simples conduisent à un semblable partage. Soit, par exemple, m un nombre > 0 non carré parfait ; tous les nombres rationnels pourront se ranger en deux classes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, la classe $\mathcal{A}$ contenant tous les nombres négatifs et les nombres positifs dont le carré est $< m$, la classe $\mathcal{B}$ les nombres positifs dont le carré est $> m$. Il n'y aura pas de plus grand nombre dans la classe $\mathcal{A}$, car, étant donné un nombre quelconque a dont le carré est $< m$, on peut en trouver un autre plus grand en extrayant la racine carrée de m par défaut avec un nombre suffisant de décimales pour que le carré de cette racine soit plus rapproché de m que ne l'est a^2. Pour une raison analogue, il n'y aura pas de plus petit nombre dans la classe $\mathcal{B}$.

Lorsque cette circonstance se présente, il n'y a plus de nombre frontière séparant les deux classes, car ce nombre ne pourrait être que le plus grand de $\mathcal{A}$ ou le plus petit de $\mathcal{B}$. Nous intercalerons alors dans l'ensemble des nombres rationnels un nouvel *élément*, défini par la condition d'être plus grand que tous les nombres de $\mathcal{A}$ et plus petit que tous ceux de $\mathcal{B}$, et nous dirons que ce nouvel élément est un *nombre irrationnel*.

L'ensemble des nombres irrationnels correspond à tous les partages possibles des nombres rationnels en deux classes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ jouissant des propriétés que nous venons d'examiner. Désormais tout nombre irrationnel pourra être représenté par une lettre. Soit α le nombre irrationnel qui s'intercale entre les deux classes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de nombres rationnels ; nous dirons en abrégé que le nombre α est *défini par le partage* ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$).

Lorsqu'un nombre irrationnel α est compris entre deux nombres rationnels a et b dont la différence est égale ou inférieure à une fraction positive ε, on dit que a et b sont des *valeurs approchées* par défaut ou par excès de α à moins de ε près. Un nombre irrationnel α étant défini, on peut toujours en trouver des valeurs aussi rapprochées que l'on veut, ainsi qu'il résulte du théorème suivant :

Soit α le nombre irrationnel défini par le partage ($\mathcal{A}, \mathcal{B}$) ; quelque petite que soit la fraction positive ε, on peut trouver respectivement dans les classes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux nombres a et b dont la différence soit égale à ε.

En effet, soit a_1 un nombre de $\mathcal{A}$, la progression

$$a_1, \quad a_1 + \varepsilon, \quad a_1 + 2\varepsilon, \quad a_1 + 3\varepsilon, \ldots$$

croissant indéfiniment, renfermera un premier terme de la classe $\mathcal{B}$, par exemple $a_1 + n\varepsilon = b$. Le nombre précédent $a = a_1 + (n - 1)\varepsilon$ sera de la classe $\mathcal{A}$ et ces deux nombres a et b satisferont aux conditions du théorème.

3. Nombres réels. — L'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels forme l'*ensemble des nombres réels*.

Pour *l'ordonner*, il faut indiquer les relations de grandeur entre ses éléments. Pour cela, il ne reste plus à définir que celles entre nombres irrationnels.

Soit α un nombre irrationnel défini par le partage ($\mathcal{A}, \mathcal{B}$) ; un nombre irrationnel α' sera *égal* à α, s'il est défini par le même partage, c'est-à-dire s'il est aussi supérieur à tous les nombres de $\mathcal{A}$ et inférieur à tous ceux de $\mathcal{B}$; mais α' sera *différent* de α s'il existe un nombre rationnel compris entre eux. Ainsi α' sera $>$ α s'il est $>$ qu'un nombre de $\mathcal{B}$, il sera $<$ α s'il est $<$ qu'un nombre de $\mathcal{A}$.

Les théorèmes suivants prouvent que la *densité* est aussi une propriété de l'ensemble des nombres réels :

I. *Entre deux nombres réels différents, on peut toujours intercaler un nombre rationnel et, par suite, une infinité.*

Si les deux nombres sont irrationnels le théorème se confond avec la définition même de l'inégalité. Si l'un des nombres est irrationnel et défini par le partage ($\mathcal{A}, \mathcal{B}$), tandis que l'autre est rationnel, celui-ci sera de la classe $\mathcal{A}$ ou de la classe $\mathcal{B}$ et ne pourra être ni le plus grand de $\mathcal{A}$ ni le plus petit de $\mathcal{B}$, la conclusion est donc la même. Enfin, le théorème est supposé connu (nº 1, 2º) si les deux nombres sont rationnels.

II. *Entre deux nombres réels différents on peut aussi intercaler un nombre irrationnel et par suite une infinité.*

Comme on peut commencer par intercaler deux nombres rationnels en

vertu du théorème précédent, on peut supposer *a priori* que les deux nombres proposés soient rationnels. Désignons-les par p et q et supposons, pour fixer les idées, $p > q > 0$. Soit m un nombre rationnel non carré parfait compris entre p^2 et q^2. Rangeons dans la classe $\mathcal{A}$ les nombres rationnels dont le carré est $< m$, dans la classe $\mathcal{B}$ ceux dont le carré est $> m$; le partage $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ définit un nombre irrationnel compris entre p et q. Les autres cas se ramènent aisément au précédent.

Enfin, l'ensemble des nombres réels jouit d'une propriété que ne possédait pas l'ensemble des nombres rationnels et que l'on peut exprimer par le théorème suivant :

III. *Si, par un procédé quelconque, on partage l'ensemble des nombres réels en deux classes A et B, telles que tout nombre de la première soit $<$ que tout nombre de la seconde, il existe nécessairement un nombre frontière, rationnel ou non, m, tel que tout nombre $< m$ soit de la classe A et tout nombre $> m$ de la classe B.*

Considérons le partage des nombres rationnels en deux classes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ que l'on obtient en rangeant dans $\mathcal{A}$ tous les nombres rationnels de A et dans $\mathcal{B}$ tous les nombres rationnels de B.

S'il y a un plus grand nombre m dans la classe $\mathcal{A}$ ce sera aussi le plus grand de la classe A. En effet, tout nombre rationel $> m$ est de la classe $\mathcal{B}$ et par le fait même aussi de la classe B ; tout nombre irrationnel $> m$ étant supérieur à une infinité de nombres rationnels $> m$ qui sont déjà de la classe B, sera *a fortiori* de cette classe. Donc m est le plus grand nombre de la classe A.

On montre de même que s'il y a un plus petit nombre m dans la classe $\mathcal{B}$, ce sera aussi le plus petit de la classe B. Dans ces deux premiers cas le nombre m sera donc le nombre frontière des deux classes A et B et ce nombre sera rationnel.

Enfin, s'il n'y a ni de plus grand nombre dans $\mathcal{A}$ ni de plus petit dans $\mathcal{B}$, le partage $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ définit un nombre irrationnel α. Celui-ci est de la classe A ou de la classe B. Supposons-le de la classe A ; je vais montrer que ce sera le plus grand de cette classe. En effet, tout nombre $> \alpha$ est aussi plus grand qu'une infinité de nombres rationnels de la classe $\mathcal{B}$ qui sont par le fait même de la classe B. Donc tout nombre $> \alpha$ fait partie de la classe B et α est le plus grand de sa classe. On montre de même que si α est de la classe B, il est le plus petit nombre de cette classe. Dans les deux cas, le nombre α est donc la frontière des deux classes A et B et cette frontière est irrationnelle.

§ 2. Généralisation des opérations de l'arithmétique.

Les considérations précédentes laissent encore incomplète la définition mathématique des nombres irrationnels, il reste à y ajouter les définitions des quatre opérations fondamentales de l'arithmétique.

4. Symétrique d'un nombre réel. — Nous appelons symétrique d'un nombre rationnel ce nombre changé de signe. La définition peut s'étendre aux nombres irrationnels. Soit α un nombre irrationnel défini par le partage $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$; désignons par $-\mathcal{B}$ la classe formée par les symétriques des nombres de $\mathcal{B}$ et par $-\mathcal{A}$ la classe formée par les symétriques des nombres de $\mathcal{A}$; tout nombre rationnel étant le symétrique d'un autre et tout nombre de la classe $-\mathcal{B}$ < que tout nombre de la classe $-\mathcal{A}$, le partage $(-\mathcal{B}, -\mathcal{A})$ définit un nombre irrationnel que nous désignerons par $-\alpha$ et que nous appellerons le symétrique de α. On aura encore d'après cette définition $-(-\alpha) = \alpha$.

5. Nombres positifs et négatifs. Valeur absolue. — Les nombres positifs sont ceux qui sont > 0 et ils sont alors > qu'une infinité de nombres rationnels également positifs. Les nombres négatifs sont ceux qui sont < 0 et ils sont alors < qu'une infinité de nombres rationnels négatifs. Si un nombre est négatif, son symétrique est positif. Celui des deux nombres α ou $-\alpha$ qui est positif s'appelle la valeur absolue de α et se désigne par $|\alpha|$.

6. Inverse d'un nombre réel. — Soit α un nombre différent de zéro ; s'il est rationnel son inverse est $\frac{1}{\alpha}$. Supposons α irrationnel ; alors α partage tous les nombres rationnels de même signe que lui en deux classes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, dont la connaissance suffit évidemment pour le définir. Désignons par $\frac{1}{\mathcal{B}}$ la classe formée par les inverses des nombres de $\mathcal{B}$ et par $\frac{1}{\mathcal{A}}$ la classe formée par les inverses des nombres de $\mathcal{A}$. Tout nombre rationnel autre que zéro étant l'inverse d'un autre, le partage $\left(\frac{1}{\mathcal{B}}, \frac{1}{\mathcal{A}}\right)$ de tous les nombres rationnels de même signe que α en deux classes définit un nombre irrationnel de même signe, que nous désignerons par $\frac{1}{\alpha}$ et que nous appellerons encore l'inverse de α.

7. Addition. — Soient α et α' deux nombres réels quelconques. Désignons par a et a' des nombres rationnels quelconques respectivement < que α et < que α', par b et b' des nombres analogues respectivement > que α et > que α'. Tous les nombres de la forme $a + a'$ seront < que ceux de la forme $b + b'$. D'ailleurs on pourra supposer (n° 2) les valeurs de a et de b suffisamment rapprochées de α, celles de a' et de b' suffisamment rapprochées de α', pour que les différences $b - a$, $b' - a'$ et par suite $(b + b') - (a + a')$ deviennent aussi petites que l'on veut.

Je dis qu'il existe un nombre réel α'' et un seul > que tout nombre de la forme $a + a'$ et < que tout nombre de la forme $b + b'$ et dont ces deux sommes représentent des valeurs aussi rapprochées que l'on veut par excès ou par défaut. Ce nombre α'' s'appelle la *somme* de α et de α' et se désigne par $\alpha + \alpha'$.

En effet, considérons le partage (A, B) de tous les nombres réels en deux classes, la classe A contenant ceux qui ne surpassent pas tous les nombres de la forme $a + a'$ et la classe B les autres nombres. En particulier, tous les nombres de la forme $a + a'$ sont de classe A et tous ceux de la forme $b + b'$ de la classe B. Comme il n'y a pas de plus grand nombre de la forme $a + a'$ ni de plus petit de la forme $b + b'$, le nombre frontière α'' entre les deux classes A et B sera plus grand que tous les premiers et plus petit que tous les seconds. Il reste donc seulement à montrer que le nombre qui jouit de cette propriété est unique. A cet effet, remarquons que s'il existait deux nombres fixes toujours supérieurs aux nombres $a + a'$ et inférieurs aux nombres $b + b'$, on pourrait trouver deux nombres rationnels r et r' compris entre ces nombres fixes et qui jouiraient de la même propriété. Or ceci est impossible, car on peut supposer la différence $(b + b') - (a + a')$ inférieure à $r - r'$.

Cette définition de l'addition permet de vérifier immédiatement que l'on a conservé les propriétés fondamentales de cette opération, exprimées par les équations suivantes :

$$\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha,$$
$$(\alpha + \alpha') + \alpha'' = \alpha + (\alpha' + \alpha''),$$
$$\alpha + 0 = \alpha,$$
$$\alpha + (-\alpha) = 0,$$
$$|\alpha + \alpha'| \leqq |\alpha| + |\alpha'|.$$

8. Multiplication. — Soient α et α' deux nombres positifs ; désignons encore par a et b, a' et b' des nombres rationnels et positifs quelconques assujettis à vérifier les inégalités :

$$a < \alpha < b, \qquad a' < \alpha' < b'.$$

Tous les produits de la forme aa' seront < que ceux de la forme bb' et l'on pourra supposer les différences $b - a$, $b' - a'$ et $bb' - aa'$ aussi petites que l'on voudra. On montrera, en raisonnant comme dans le cas de l'addition, qu'il existe un nombre réel, positif et un seul α'' > que tout produit de la forme aa' et < que tout produit de la forme bb'. Ces produits peuvent être supposés aussi rapprochés qu'on veut du nombre α''. Celui-ci se nomme le *produit* des nombres α et α' et se désigne par $\alpha\alpha'$.

Si l'un des deux nombres α, α' ou tous les deux sont négatifs, la définition du produit se ramène à la précédente par la règle des signes, c'est-à-dire par les relations

$$\alpha\alpha' = -\alpha(-\alpha') = (-\alpha)(-\alpha').$$

Ces définitions permettent de vérifier immédiatement que l'on a conservé les propriétés de la multiplication, exprimées par les relations générales :

$$\alpha\alpha' = \alpha'\alpha,$$
$$(\alpha\alpha')\,\alpha'' = \alpha\,(\alpha'\alpha''),$$
$$\alpha\,(\alpha' + \alpha'') = \alpha\alpha' + \alpha\alpha'',$$
$$\alpha.\frac{1}{\alpha} = 1,$$
$$\alpha.0 = 0,$$
$$\alpha.1 = \alpha,$$
$$|\,\alpha\alpha'\,| = |\,\alpha\,|\ |\,\alpha'\,|\,.$$

On observera encore qu'un produit de plusieurs facteurs ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul et qu'il est toujours nul dans ce cas.

9. La soustraction est l'opération inverse de l'addition. Soustraire α' de α c'est déterminer le nombre qu'il faut ajouter à α' pour obtenir α. Ce nombre s'appelle la *différence* de α et α' et on le désigne par $\alpha - \alpha'$. Pour le déterminer, posons $x = \alpha - \alpha'$; on aura la condition $\alpha' + x = \alpha$, et, en ajoutant $-\alpha'$ aux deux membres, on obtient, par les propriétés de l'addition, $x = \alpha + (-\alpha')$. Donc la différence $\alpha - \alpha'$ s'obtient en ajoutant à α le symétrique de α'. Cette règle ramène la soustraction à l'addition et prouve que cette opération a toujours une solution et une seule.

10. La division est l'opération inverse de la multiplication. Diviser α par α' c'est déterminer un nombre dont le produit par α' reproduise α. Ce nombre s'appelle le *quotient* de α par α' et se représente par $\frac{\alpha}{\alpha'}$; pour le déterminer, posons $x = \frac{\alpha}{\alpha'}$; on aura la condition $x\,\alpha' = \alpha$. Si α' n'est pas nul, on peut multiplier les deux membres de cette égalité par $\frac{1}{\alpha'}$, et on en tire, par les propriétés de la multiplication, $x = \alpha\left(\frac{1}{\alpha'}\right)$. Donc le *quotient* de α par α' est égal au produit de α par l'inverse de α'. Cette règle ramène la division à la multiplication et prouve que cette opération a toujours une solution et une seule, pourvu que le diviseur soit différent de zéro.

§ 3. Limites.

11. Continuité de l'ensemble des nombres réels. — Les nombres réels, c'est-à-dire les nombres tant rationnels qu'irrationnels, servent à exprimer la mesure des grandeurs continues, longueurs, aires, volumes, etc. On dit aussi que l'ensemble des nombres réels est un ensemble continu et l'on peut, au point de vue mathématique, définir la *continuité* de cet ensemble par les deux propriétés suivantes :

1° Entre deux nombres réels différents on peut toujours en intercaler une infinité d'autres $>$ que l'un et $<$ que l'autre.

2° Si l'on partage tous les nombres réels en deux classes A et B, telles que tout nombre de A soit < que tout nombre de B, ces deux classes seront séparées par un nombre frontière m qui sera le plus grand de A ou le plus petit de B, mais tout nombre < m sera de la classe A et tout nombre > m de la classe B.

Nous avons montré dans un paragraphe précédent (n° 3) comment on peut démontrer ces propriétés en toute rigueur, en les faisant reposer sur des définitions purement abstraites. C'est sur elles qu'est fondée la théorie des limites.

12. Limites. — On appelle variable une quantité qui peut recevoir une infinité de valeurs différentes. Soit u une variable qui passe par une infinité de valeurs réelles, rationnelles ou non,

$$u = u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n, \ldots\ u_{n+p}, \ldots ;$$

on dit que cette variable tend vers une limite déterminée, si les valeurs de u se rapprochent indéfiniment d'un nombre déterminé a, de telle sorte que la différence $(u_n - a)$ finisse par décroître en valeur absolue en dessous de toute fraction donnée ε si petite qu'elle soit. On dit alors que u a pour limite a et l'on écrit

$$\lim u = a.$$

Suivant cette définition, une même variable ne peut pas tendre vers deux limites différentes a et b, car, après avoir supposé $\varepsilon < \left|\frac{b-a}{2}\right|$, on pourrait aussi supposer, dans ce cas, $|u - a|$ et $|u - b|$ tous deux $< \varepsilon$, alors leur différence $|b - a|$ serait $< 2\varepsilon$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite sur ε.

Il suit encore de la définition de la limite que si u a pour limite a, $(u - a)$ aura pour limite *zéro* et réciproquement.

13. Caractère général de convergence. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la variable u tende vers une limite déterminée est que l'on puisse toujours trouver un terme suffisamment éloigné dans la suite des valeurs successives de u pour qu'il diffère aussi peu que l'on veut de tous les termes suivants.*

Cet énoncé doit être entendu en ce sens qu'à tout nombre positif ε, si petit qu'il soit, correspond un indice n, tel que la condition

$$|u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$$

ait lieu pour tous les indices $(n + p)$ supérieurs à n.

1° Cette condition est *nécessaire*, car, si les valeurs de u se rap-

prochent indéfiniment d'un même nombre a, elles se rapprochent aussi indéfiniment les unes des autres.

2° Cette condition est aussi *suffisante.*

Supposons d'abord qu'il existe un nombre a, tel que la variable u ne devienne jamais ni définitivement supérieure ni définitivement inférieure à a. Dans ce cas, u aura pour limite a, car, les valeurs de u suffisamment éloignées dans la série se rapprochant autant que l'on veut de l'une d'entre elles et par suite les unes des autres, elles se rapprocheront aussi indéfiniment de a qui reste toujours compris entre certaines de ces valeurs.

En second lieu, s'il n'existe aucun nombre jouissant de cette propriété, ils se partagent tous en deux classes, l'une A renfermant ceux auxquels u finit par devenir définitivement supérieur, l'autre B ceux auxquels u devient définitivement inférieur. Ces deux classes existent toujours, puisque les valeurs de u finissant par se rapprocher autant qu'on veut les unes des autres, ne peuvent ni croître ni décroître indéfiniment. Soit a la frontière de ces deux classes; quelque petit que soit ε, u finira par rester compris entre $a - \varepsilon$ et $a + \varepsilon$, car le premier nombre est de la classe A et le second de la classe B. Donc u a pour limite a.

14. Caractère particulier de convergence. — *Si la variable varie toujours dans le même sens, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle tende vers une limite est que sa valeur absolue ne puisse pas surpasser un nombre fixe.*

Cette condition étant évidemment nécessaire, il suffit d'établir qu'elle est suffisante.

Supposons, pour fixer les idées, que la variable u ne varie qu'en croissant. Comme il y a par hypothèse des nombres que u ne peut pas surpasser, tous les nombres réels se partageront en deux classes A et B, la première renfermant ceux que u peut surpasser, la seconde ceux que u ne peut pas surpasser. Il n'y a pas de plus grand nombre dans la classe A ce qui impliquerait contradiction, donc le nombre frontière a est le plus petit de la classe B. Quelque petit que soit ε, $a - \varepsilon$ est de la classe A et u finit par rester compris entre $a - \varepsilon$ et a, Donc u a pour limite a.

On énonce souvent le théorème précédent en disant qu'*une variable qui varie toujours dans le même sens tend nécessairement vers une limite finie ou infinie.*

15. Principes de la théorie des limites. — I. *La limite d'une somme, d'une différence, d'un produit de variables qui tendent vers des limites déterminées est égale à la somme, à la différence, au produit de ces limites. La limite d'un quotient de variables qui tendent vers des limites déterminées, est égale au quotient de ces limites, pourvu que la limite du dénominateur soit différente de zéro.*

Ces propositions se démontrent toutes de la même façon, choisissons la dernière comme exemple. Soient deux variables x et y ayant respectivement pour limites a et b; on pourra poser

$$x = a + \alpha, \qquad y = b + \beta,$$

α et β ayant pour limite zéro. On en tire

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}.$$

Si b est différent de zéro, cette dernière quantité peut être rendue aussi petite que l'on veut avec α et β, donc $\frac{x}{y}$ a pour limite $\frac{a}{b}$.

De la combinaison des propositions précédentes, on déduit le théorème suivant :

II. *Soit* R$(x, y, \dots)$ *une expression rationnelle quelconque des variables* $x, y, \dots$, *c'est-à-dire une expression dont le calcul ne comporte que les quatre opérations fondamentales ; si les variables* $x, y, \dots$ *ont respectivement pour limites* $a, b, \dots$, R$(x, y, \dots)$ *aura pour limite* R$(a, b, \dots)$.

Ce théorème est soumis toutefois à cette restriction que, si parmi les opérations à effectuer sur les nombres $a, b, \dots$ figure une division, le diviseur ne soit pas nul.

III. *Si deux variables restent constamment égales et si l'une tend vers une limite déterminée, l'autre tend vers la même limite.*

En effet, si u a pour limite a, $u - a$ décroît indéfiniment ; si $u = v$, $v - a = u - a$ décroît aussi indéfiniment et v a aussi pour limite a.

IV. *Une quantité variable qui reste constamment comprise entre deux autres qui ont la même limite a, tend aussi vers la limite a.*

En effet, si w est compris entre deux variables u et v qui tendent vers a, $w - a$ sera compris entre $u - a$ et $v - a$ qui décroissent indéfiniment et décroîtra lui-même indéfiniment. Donc w a pour limite a.

16. Méthode des limites. — Lorsqu'on a obtenu une relation entre

des variables qui subsiste pour toutes les valeurs des variables, on peut, en s'appuyant sur les principes précédents, y remplacer les variables par leurs limites. Cette opération porte le nom de *passage à la limite.* Cette nouvelle opération qui s'ajoute aux quatre opérations fondamentales de l'arithmétique, caractérise l'*analyse infinitésimale.*

La *méthode des limites* consiste à trouver des relations entre les quantités par passage à la limite.

La méthode des limites se décompose en plusieurs branches suivant la nature des variables que l'on considère dans ce passage à la limite (séries, produits infinis, fractions continues, calcul différentiel, calcul intégral).

17. Méthode infinitésimale. — Lorsqu'une quantité variable a pour limite zéro, on dit que c'est une *quantité infiniment petite* ou un *infiniment petit.* Au contraire, une quantité infiniment grande est une quantité variable qui augmente au-delà de toute limite assignable.

La *méthode infinitésimale* est celle où l'on se sert de la considération des infiniment petits. Dans le *calcul différentiel,* on considère les quantités comme limites du rapport de deux infiniment petits. Dans le *calcul intégral,* on les considère comme limites d'une somme d'un nombre indéfiniment croissant d'infiniment petits.

Dans les questions où on les considère, on établit le plus souvent, entre les divers infiniment petits que l'on rencontre, une classification très importante, qui s'appuie sur les définitions suivantes :

On dit qu'une quantité α est *infiniment petite par rapport à une autre* β, lorsque le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ a pour limite 0. Au contraire, les deux infiniment petits sont *du même ordre* si leur rapport a une limite finie et différente de zéro.

Dans beaucoup de questions, on est amené à choisir un infiniment petit particulier α, que l'on appelle *infiniment petit principal,* et qui sert à classer tous les autres. Un infiniment petit du même ordre que α s'appelle alors *du premier ordre* et un infiniment petit de l'ordre de α^r est de l'ordre r.

18. — Les avantages de la méthode infinitésimale résultent de deux principes fondamentaux, connus sous le nom de *principes de substitution des infiniment petits.*

I. *La limite du rapport de deux infiniment petits α et β n'est pas*

changée quand on leur substitue respectivement deux autres infiniment petits α' *et* β', *pourvu que les rapports* $\frac{\alpha}{\alpha'}$ *et* $\frac{\beta}{\beta'}$ *aient pour limite l'unité.*

En effet, de l'identité

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\alpha'}{\alpha} \times \frac{\beta}{\beta'}\quad .$$

on conclut par les principes de la méthode des limites

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta} \lim \frac{\alpha'}{\alpha} \lim \frac{\beta}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

La remarque suivante sert souvent à reconnaître que le rapport de deux infiniment petits tend vers l'unité :

Si β reste compris entre deux infiniment petits α et α' dont le rapport tend vers l'unité, il en sera de même des rapports $\beta : \alpha$ et $\beta : \alpha'$.

En effet, en divisant l'inégalité

$$\alpha < \beta < \alpha'$$

par α supposé positif, il vient

$$1 < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\alpha'}{\alpha}$$

et, comme $\alpha' : \alpha$ est supposé tendre vers l'unité, il suit principe IV (n° 15) que $\beta : \alpha$ tend vers l'unité. La même démonstration s'applique au rapport $\beta : \alpha'$.

II. *La limite d'une somme d'infiniment petits de même signe* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$, *dont le nombre* n *augmente indéfiniment, n'est pas changée quand on remplace ces infiniment petits par d'autres* $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_n$, *pourvu que les rapports* $\beta_i : \alpha_i$ *tendent uniformément vers l'unité.*

Le mot *uniformément* doit être entendu en ce sens que, quelque petite que soit la fraction donnée ε, on peut prendre n assez grand pour qu'on ait, quel que soit l'indice i,

$$1 - \varepsilon < \frac{\beta_i}{\alpha_i} < 1 + \varepsilon.$$

S'il en est ainsi, on aura, en supposant les α positifs,

$$(1 - \varepsilon)\alpha_i < \beta_i < (1 + \varepsilon)\alpha_i ;$$

puis, en additionnant toutes les inégalités semblables,

$$(1 - \varepsilon)\Sigma\alpha_i < \Sigma\beta_i < (1 + \varepsilon)\Sigma\alpha_i,$$

et, par conséquent,

$$1 - \varepsilon < \frac{\Sigma\beta_i}{\Sigma\alpha_i} < 1 + \varepsilon.$$

D'ailleurs, ε étant aussi petit qu'on le veut, on en conclut

$$\lim \frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots\cdots + \beta_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_n} = 1,$$

ce qui exige que $\beta_1 + \beta_2 + \cdots\cdots \beta_n$ et $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_n$ aient la même limite finie, nulle ou infinie.

19. Ces deux principes généraux peuvent revêtir un autre énoncé moyennant la remarque suivante :

Quand deux infiniment petits α et α' ont pour limite de leur rapport l'unité, leur différence δ est infiniment petite par rapport à chacun d'eux, et réciproquement.

En effet, l'équation $\delta = \alpha - \alpha'$ peut s'écrire

$$\frac{\delta}{\alpha'} = \frac{\alpha}{\alpha'} - 1.$$

Le second membre ayant pour limite zéro, il en est de même du premier et δ est infiniment petit par rapport à α'. Réciproquement si δ est infiniment petit par rapport à α', $\delta : \alpha'$ tend vers zéro, et par conséquent, $\alpha : \alpha'$ tend vers l'unité.

Les principes de substitution peuvent donc aussi s'énoncer comme il suit :

On peut, sans changer la limite d'un rapport ou d'une somme d'infiniment petits, négliger dans chaque terme une quantité infiniment petite par rapport à lui.

Toutefois l'énoncé de ce principe doit être complété dans le cas d'une somme par la condition contenue sous le mot *uniformément* dans l'énoncé primitif.

L'utilité de ces principes consiste en ce qu'ils permettent de négliger dans bien des cas précisément la partie des infiniment petits qui font la difficulté du problème.

§ 4. Des fonctions et de la continuité des fonctions d'une variable réelle.

20. Des variables en général. — Soit x une variable réelle, c'est-à-dire une quantité qui peut recevoir une infinité de valeurs réelles.

On dit que cette variable est *bornée supérieurement* si l'on peut assigner un nombre M que cette variable ne peut pas surpasser. Dans ce cas, il existe un plus petit nombre que x ne peut pas surpasser. En effet, tous les nombres se partagent en deux classes A et B, la première renfermant les nombres que x peut surpasser, et la seconde ceux que x ne peut pas surpasser. Il n'y a pas de plus grand nombre dans la classe A, ce qui impliquerait contradiction, car si x est $> a$, il surpasse encore une infinité d'autres nombres $> a$; donc le nombre frontière est le plus petit de la classe B. Ce plus petit nombre que x ne peut pas surpasser s'appelle la *limite supérieure* de la variable.

On dit de même qu'une variable est *bornée inférieurement* si l'on peut assigner un nombre m en dessous duquel elle ne peut pas descendre. Dans ce cas, il y a un plus grand nombre, jouissant de cette propriété et il s'appelle la *limite inférieure* de cette variable.

On dit que ces limites sont *accessibles*, si l'on peut attribuer à la variable ses valeurs limites. Si on ne le peut pas, ces limites sont *inaccessibles*. Supposons, par exemple, que x désigne une fraction proprement dite quelconque, les limites inférieures et supérieures de x seront 0 et 1, mais ces limites seront inaccessibles, puisqu'elles ne sont plus fractionnaires.

On dit que *la variable x varie dans l'intervalle* (a, b), lorsqu'elle peut recevoir toutes les valeurs comprises entre a et b, y compris ces valeurs extrêmes. Nous supposerons toujours, sauf indication contraire, que l'on a $a < b$. Ces nombres sont donc les limites inférieures et supérieures de x et elles sont accessibles.

Si x reçoit toutes ces mêmes valeurs sauf la seule valeur a, ou bien sauf la seule valeur b, ou bien encore sauf les deux seules valeurs a et b, on écrit respectivement, pour indiquer que ces limites sont alors inaccessibles, que x varie dans les intervalles $(a + 0, b)$, ou bien $(a, b - 0)$, ou enfin $(a + 0, b - 0)$.

La variation de x se présente géométriquement par le déplacement d'un point sur une droite indéfinie OO' ; on porte sur OO' une longueur $OX = x$ dans un sens déterminé par le signe de x. Sauf indication contraire, on suppose la droite horizontale et les segments positifs comptés de gauche à droite. Par allusion à cette représentation, une valeur particulière de x s'appelle un point, la valeur $x = a$ le point a, etc.

21. Des fonctions d'une variable. — Étant données deux variables

x et y, on dit qu'elles sont fonctions l'une de l'autre dans le sens le plus général, s'il existe une dépendance quelconque entre les valeurs que l'on peut attribuer à ces deux variables. En général, on considère une des deux variables comme *indépendante*, par exemple x. La valeur de x peut être choisie à volonté, mais, x étant donnée, y n'est plus arbitraire. On dit alors que y est fonction de x et cette dépendance s'exprime par la notation

$$y = f(x).$$

On étudie dans les éléments des mathématiques un certain nombre de fonctions particulièrement simples, dont les propriétés sont bien connues et que l'on représente par des symboles particuliers. Ce sont les *fonctions élémentaires*

$$x^m, \ A^x, \ \sin x, \text{ etc.}$$

On dit que la fonction $f(x)$ est *simple*, si elle n'est susceptible que d'une seule valeur pour chaque valeur de x, telles sont A^x, sin x,... Au contraire, la fonction est *à déterminations multiples* si elle est susceptible de plusieurs valeurs pour chaque valeur de x. Telle est la fonction $\sqrt{x}$, qui peut recevoir deux valeurs de signes contraires pour chaque valeur de x.

On classe les fonctions en fonctions *explicites* et *implicites* suivant que la relation entre y et x est donnée par une équation résolue par rapport à la fonction y ou non résolue par rapport à cette fonction ; en fonctions *algébriques* ou *transcendantes* suivant que la relation entre y et x peut ou ne peut pas être exprimée par une équation dont les deux membres sont des polynômes entiers en x et en y. Les fonctions algébriques se partagent elles-mêmes en *rationnelles* ou *irrationnelles*, suivant que l'équation qui lie y à x est du premier degré par rapport à y ou ne l'est pas. Une fonction rationnelle s'exprime donc par le quotient de deux polynômes entiers en x ; en particulier, si elle se réduit à un polynôme, on dit qu'elle est *rationnelle* et *entière*.

Lorsque la relation $y = f(x)$ qui lie y à x peut être résolue par rapport à x, de telle sorte qu'on en tire $x = \varphi(y)$, la fonction $\varphi(y)$ s'appelle la *fonction inverse* de $f(x)$. C'est ainsi que les fonctions x^m, A^x, sin$x$... ont respectivement pour inverses $x^{\frac{1}{m}}$, log$x$, ar. sin$x$, etc.

La variation d'une fonction se représente aussi géométriquement.

On trace généralement deux axes rectangulaires OX et OY, par rapport auxquels on détermine les coordonnées x et y d'un point. L'équation $y = f(x)$ sera généralement celle d'une courbe plane, que l'on considère comme une représentation géométrique de la fonction $f(x)$.

Remarque. — Il arrive souvent que l'on est amené à considérer une constante ou bien la variable indépendante elle-même comme des cas particuliers d'une fonction. Il n'y a là rien qui doive surprendre, car ces cas particuliers se rencontrent déjà dans les fontions élémentaires et ce sont même les plus simples. Ainsi, la fonction x^m se réduit à 1 pour $m = 0$ et à x pour $m = 1$.

22. Oscillation d'une fonction dans un intervalle (a, b). — Si la fonction $f(x)$ est bornée dans l'intervalle (a, b), elle a, comme on le sait (20), une *limite inférieure* m et une *limite supérieure* M. La différence $M - m$ entre les limites supérieure et inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) s'appelle l'*oscillation* de la fonction dans cet intervalle. Si la fonction n'est pas bornée dans l'intervalle (a, b), on dit que son oscillation est *infinie* dans cet intervalle.

Suivant ces définitions, si l'oscillation de $f(x)$ est finie et égale à $M - m$ dans l'intervalle (a, b) et que l'on partage cet intervalle en plusieurs autres consécutifs par des points intermédiaires : 1°) la limite supérieure de la fonction sera encore M dans un au moins des intervalles partiels et ne pourra surpasser M dans aucun ; 2°) la limite inférieure sera m dans un au moins des intervalles partiels et ne sera inférieure à m dans aucun ; 3°) l'oscillation sera égale à $M - m$ dans un au moins des intervalles partiels et ne sera supérieure à $M - m$ dans aucun. Enfin, si l'oscillation de $f(x)$ est infinie dans l'intervalle (a, b), elle le sera encore dans un au moins des intervalles partiels.

23. Définitions relatives à la continuité. — I. *La fonction $f(x)$ est continue au point a, ou pour $x = a$, si $f(x)$ a pour limite $f(a)$ quand x tend vers a d'une manière quelconque.* — Autrement, *$f(x)$ est continue au point a, si cette fonction est bornée dans l'intervalle $(a - \delta, a + \delta)$ à partir d'une valeur positive suffisamment petite de δ et si l'oscillation de $f(x)$ dans cet intervalle a pour limite zéro avec δ.*

Ces deux définitions sont équivalentes. En effet, 1°) si $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a, à tout positif nombre ε, si petit qu'il soit, correspond un nombre δ tel que l'on ait

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon,$$

sous la condition $|x - a| < \delta$. Donc les limites supérieures et inférieures de $f(x)$ dans l'intervalle $(a - \delta, a + \delta)$ seront comprises entre ces mêmes limites $f(a) - \varepsilon$ et $f(a) + \varepsilon$, leur différence sera $< 2\varepsilon$ et elle aura pour limite 0 avec δ. 2°) Réciproquement, si l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle $(a - \delta, a + \delta)$ a pour limite 0 avec δ, on pourra, quelque petit que soit ε, supposer $f(x)$ comprise entre $f(a) - \varepsilon$ et $f(a) + \varepsilon$, pourvu que x le soit entre $a - \delta$ et $a + \delta$, donc $f(x)$ a pour limite $f(a)$ quand x tend vers a.

On dit que $f(x)$ est *continue à droite du point* a, si l'on a, h restant positif,

$$\lim_{h=0} f(a + h) = f(a).$$

Si cette relation a lieu, h restant négatif, on dit que $f(x)$ est *continue à gauche du point* a.

Donc une fonction continue à droite et à gauche du point a est continue en ce point.

II. *La fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) si elle est continue par toutes les valeurs de x comprises entre a et b, à droite du point a et à gauche du point b.*

On dit que $f(x)$ est *continue dans le voisinage du point* a, si elle l'est dans l'intervalle $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ à partir d'une valeur positive suffisamment petite de ε.

III. Si la fonction $f(x)$ n'est pas continue pour $x = a$ ou dans l'intervalle (a, b), on dit qu'elle est *discontinue au point* a ou *dans l'intervalle* (a, b).

24. Continuité des fonctions composées. — I. *La somme, le produit, le quotient de deux fonctions continues au point a ou dans l'intervalle (a, b) sont des fonctions continues en ce point ou dans cet intervalle, à moins qu'une fonction prise comme diviseur ne s'annule.*

Ces théorèmes résultent immédiatement des principes correspondants de la théorie des limites (n° 15), Démontrons, par exemple, le dernier. Soient $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions continues au point a; si $F(a)$ n'est pas nulle et si x tend vers a, la limite du quotient $f(x) : F(x)$ sera égale au quotient des limites $f(a) : F(a)$. Donc $f(x) : F(x)$ est continue au point a. En second lieu, si $f(x)$ et $F(x)$ sont continues dans l'intervalle (a, b) et que $F(x)$ ne s'annule pas dans cet inter-

valle, le quotient $f(x) : F(x)$ sera continu pour toutes les valeurs de x, donc dans l'intervalle (a, b).

II. *Soient $u = f(x)$ et $y = F(u)$; si $f(x)$ est continue pour $x = a$ et $F(u)$ continue pour $u = f(a)$, y sera fonction continue de x au point a.*

On a, en effet, x tendant vers a.

$$\lim F[f(x)] = F[\lim f(x)] = F[f(a)].$$

Nous concluons de là que *les fonctions composées* par addition, multiplication, division ou superposition du signe fonctionnel ne peuvent être discontinues que si l'une des fonctions composantes est discontinue ou si l'une des fonctions servant de diviseur peut s'annuler.

25. Discontinuité. — Si la fonction $f(x)$ est discontinue au point a, on dit que a est un *point de discontinuité*. Ce cas se présente, sous une première forme, si la fonction $f(x)$ n'est bornée dans l'intervalle $(a - \delta, a + \delta)$ pour aucune valeur de δ si petite qu'elle soit ; on dit alors que *la discontinuité de $f(x)$ est infinie au point a.* Sinon, l'oscillation de $f(x)$, qui est constante ou décroissante quand δ diminue, tend vers une limite déterminée quand δ tend vers zéro. Cette limite s'appelle la *discontinuité de $f(x)$ au point a.*

Cette discontinuité s'appelle la *discontinuité totale* par opposition avec *les discontinuités de $f(x)$ à droite* et *à gauche du point a.* Celles-ci se définissent comme la première, mais en considérant la limite de l'oscillation respectivement dans les intervalles $(a, a + \delta)$ et $(a - \delta, a)$.

Suivant leurs définitions, toutes ces discontinuités sont donc essentiellement positives. Dire qu'elles sont nulles revient à dire que la fonction est continue au point a.

26. Théorème. — *Soit ε un nombre positif; s'il est impossible, en intercalant un nombre convenable de points de subdivison entre a et b, de partager l'intervalle (a, b) en intervalles consécutifs, de telle sorte que l'oscillation de $f(x)$ soit $< \varepsilon$ dans chacune de ces parties consécutives, il existe dans l'intervalle (a, b) un point au moins où la discontinuité de $f(x)$ est $=$ ou $> \varepsilon$. Ce point peut être a ou b, mais c'est alors la discontinuité à droite du point a ou la discontinuité à gauche du point b qui sera $=$ ou $> \varepsilon$.*

Admettons que l'impossibilité supposée dans cet énoncé ait lieu pour l'intervalle (a, b) et partageons cet intervalle en deux autres par son point milieu. L'impossibilité subsistera dans l'une au moins de ces deux parties, sinon elle n'existerait pas dans l'intervalle total. Soit (a_1, b_1) celle des deux moitiés dans laquelle l'impossibilité subsiste, ou l'une quelconque des deux moitiés si l'impossibilité subsiste dans toutes les

deux. Partageons de même (a_1, b_1) en deux parties égales et désignons par (a_2, b_2) l'une des deux moitiés dans laquelle l'impossibilité subsiste encore. Partageons (a_2, b_2) en parties égales et continuons ainsi de suite. Nous formerons deux suites de nombres $a_1, a_2, .. a_n, ..$ et $b_1, b_2, .. b_n, ..$ l'une stationnaire ou croissante, l'autre stationnaire ou décroissante, et tendant vers la même limite c, puisque $b_n - a_n = (b - a) : 2^n$ a pour limite 0. Le point c appartient donc a un intervalle (a_n, b_n) aussi petit que l'on veut et intérieur à (a, b) dans lequel l'oscillation de $f(x)$ est $=$ ou $> \varepsilon$. Donc la discontinuité au point c est $=$ ou $> \varepsilon$. Enfin, si c coïncide avec a ou avec b, la discontinuité se détermine en ne tenant compte que des valeurs de $f(x)$ à droite de a ou à gauche de b, ce qui achève la démonstration du théorème.

27. Propriétés des fonctions continues d'une variable. — I. *Si $f(x)$ est continue au point a, et ne s'annule pas en ce point, $f(x)$ sera de même signe que $f(a)$ dans l'intervalle $(a - \delta, a + \delta)$ pourvu qu'on choisisse δ suffisamment petit.*

En effet, $f(x)$ ayant pour limite $f(a)$ quand x tend vers a, on peut choisir δ assez petit pour qu'on ait

$$|f(x) - f(a)| < |f(a)|,$$

sous la condition $|x - a| < \delta$. Cela fait, la somme

$$f(a) + [f(x) - f(a)],$$

qui est égale à $f(x)$, aura le signe de son premier terme $f(a)$ dans l'intervalle $(a - \delta, a + \delta)$.

II. *Si $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), $f(x)$ est bornée supérieurement et inférieurement dans cet intervalle.*

Soit X une quantité qui varie depuis a jusqu'à b ; la fonction $f(x)$ étant continue au point a, sera bornée par hypothèse dans l'intervalle (a, X) pourvu que X soit suffisamment voisin de a (nº 23). Soit ξ la limite supérieure des valeurs de X pour lesquelles $f(x)$ est bornée dans l'intervalle (a, X), de sorte que la fonction $f(x)$ sera bornée dans l'intervalle $(a, \xi - \varepsilon)$ quelque petite que soit la fraction positive ε. Cette fonction sera encore bornée dans l'intervalle $(\xi - \varepsilon, \xi)$ si l'on suppose ε suffisamment petit, puisque $f(x)$ est continue au point ξ. Donc, 1º) la fonction $f(x)$ est bornée dans l'intervalle (a, ξ) formé par la réunion des deux précédents. Enfin 2º) je dis que ξ est égal à b, car, si ξ était $< b$, $f(x)$ qui est continue au point ξ serait encore bornée dans l'intervalle suffisamment petit $(\xi, \xi + \varepsilon)$, donc dans l'intervalle total $(a, \xi + \varepsilon)$ et ξ ne serait par la limite supérieure que l'on a supposée.

Ce théorème est aussi une conséquence immédiate de celui du n° 26. Puisque $f(x)$ n'a pas de discontinuité dans l'intervalle (a, b), on peut, le nombre positif ε étant donné, trouver un mode de division de l'intervalle (a, b) en parties consécutives, tel que l'oscillation de $f(x)$ soit $< \varepsilon$ dans chacune d'elles. Soit n le nombre de ces parties ; la fonction $f(x)$ restera comprise entre $f(a) - n\varepsilon$ et $f(a) + n\varepsilon$.

III. *Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), ses limites supérieure et inférieure sont toujours accessibles, c'est-à-dire qu'il existe toujours au moins deux valeurs de x dans l'intervalle (a, b) qui donnent à $f(x)$ ses valeurs maximum et minimum M et m.*

Faisons la démonstration pour la limite M. A cet effet, considérons la fonction continue, non négative, $M - f(x)$. Cette fonction peut décroître en dessous de tout nombre positif donné ε, puisque $f(x)$ peut surpasser tout nombre inférieur à M. Donc la fonction $1 : [M - f(x)]$ peut surpasser tout nombre assignable et elle n'est pas bornée dans l'intervalle (a, b). Par conséquent, cette nouvelle fonction est discontinue (II), ce qui n'a lieu (n° 24) que si $M - f(x)$ s'annule dans l'intervalle (a, b).

IV. *Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) et qu'on divise cet intervalle en intervalles partiels consécutifs, à tout nombre positif 2ε, si petit qu'il soit, correspond un nombre δ tel que l'oscillation de $f(x)$ dans chaque intervalle partiel soit inférieure à 2ε pourvu que l'étendue de chaque intervalle partiel soit inférieure à δ.*

En effet, on peut trouver un premier mode de décomposition, tel que l'oscillation de $f(x)$ soit inférieure à ε dans chaque intervalle partiel, sinon la fonction aurait une discontinuité $> \varepsilon$ en un point de l'intervalle (a, b) et ne serait pas continue (n° 26). Soit δ l'étendue du plus petit de ces intervalles. Si l'on considère un autre mode de subdivision en intervalle $< \delta$, un intervalle de ce second mode de subdivision ne pourra s'étendre sur plus de deux intervalles du premier mode. Donc l'oscillation de la fonction dans cet intervalle ne surpassera pas la somme des oscillations de $f(x)$ dans deux intervalles du premier mode. Elle restera, par conséquent, inférieure à $\varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

On énonce souvent le théorème précédent en disant qu'une fonction continue dans un intervalle (a, b) l'est *uniformément* dans cet intervalle.

V. *Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, $f(x)$ s'annule pour une valeur ξ de x comprise dans l'intervalle (a, b).*

Remarquons d'abord que $f(x)$ aura le signe de $f(a)$ pour x suffisamment voisin de a et celui de $f(b)$ pour x suffisamment voisin de b (I).

Donc, si nous désignons par ξ la limite inférieure des valeurs de x comprises entre a et b pour lesquelles $f(a)$ et $f(x)$ sont de signes contraires, ξ sera $> a$ et $< b$. On aura $f(\xi) = 0$, car si $f(\xi)$ avait un signe déterminé, $f(x)$ garderait ce signe dans l'intervalle $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ pourvu que δ soit suffisamment petit (I), et ξ ne serait pas la limite inférieure des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ a un signe particulier.

VI. *Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), cette fonction peut prendre, dans l'intervalle (a, b), toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.*

En effet, soit A une quantité comprise entre ces deux valeurs, la fonction continue $f(x) - A$, prenant des valeurs de signes contraires pour $x = a$ et $x = b$, s'annulera en un point intermédiaire ξ et l'on aura, par conséquent, $f(\xi) = A$.

On énonce souvent cette propriété en disant qu'une fonction continue dans un intervalle (a, b) ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

Exercices.

1. Soit x une variable positive et $[x]$ le plus grand entier contenu dans x. On considère la fontion $x - [x]$. Prouver : 1°) qu'elle est discontinue pour les valeurs entières de x et continue pour les autres valeurs ; 2°) que sa limite inférieure est 0 et sa limite supérieure 1, dans tout intervalle comprenant un nombre entier ; 3°) que cette limite inférieure est *accessible* et cette limite supérieure *inaccessible*.

2. La fonction $\sin \frac{1}{x}$ est définie, sauf pour $x = 0$; on lui donne, pour compléter sa définition, la valeur 0 pour $x = 0$. Prouver : 1°) que cette fonction est discontinue pour $x = 0$ et que sa discontinuité est égale à 2 ; 2°) que cependant, dans tout intervalle comprenant le point 0, la fonction ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

3. On définit la fonction $\varphi(x)$ en posant $\varphi(x) = \frac{1}{q}$ quand x est *rationnel* et égal à une fraction irréductible $\pm p : q$ et $\varphi(x) = 0$ quand x est *irrationnel*. Prouver : 1° que $\varphi(x)$ est continue pour toute valeur irrationnelle de x ; 2°) discontinue pour toute valeur rationnelle ; 3°) que la discontinuité est égale à la fonction elle-même.

Cet exemple prouve qu'il existe des fonctions telles qu'il y ait, dans tout intervalle si petit qu'il soit, une infinité de points où elles sont continues et une infinité d'autres où elles sont discontinues.

4. On peut définir la continuité en un point et dans un intervalle

(a, b) comme au nº 23, mais en ne donnant à la variable indépendante x que des valeurs rationnelles. Ceci posé, soit $f(x)$ une fonction définie pour les valeurs rationnelles de x seulement, et continue pour toutes ces valeurs dans l'intervalle (a, b). Existe-t-il une fonction $F(x)$, continue pour toutes les valeurs réelles de x dans l'intervalle (a, b) et qui coïncide avec $f(x)$ pour x rationnel?

R. Oui, si la continuité de $f(x)$ est uniforme (c'est à dire si la propriété IV du nº 27 s'applique à $f(x)$) ; non, dans le cas contraire. On le prouvera en montrant que, dans le cas de l'affirmative, $f(x)$ tend vers une limite déterminée $F(\alpha)$ quand x tend vers une valeur irrationnelle α.

§ 5. Fonctions de plusieurs variables.

28. Des variables, des fonctions et de leurs limites. — Si les valeurs que reçoit la variable u dépendent des valeurs qu'on attribue à plusieurs autres variables $x, y, \ldots$ on dit que u est une fonction de ces variables et l'on écrit $u = f(x, y, \ldots)$. La fonction est *simple* ou *à déterminations multiples*, selon qu'elle est susceptible d'une seule ou bien de plusieurs valeurs pour chaque système de valeurs de $x, y, \ldots$ La fonction est *algébrique* ou *transcendante*, *rationnelle* ou *irrationnelle*, *implicite* ou *explicite*, comme dans le cas des fonctions d'une seule variable.

On dit que les variables $x, y, \ldots$ varient dans le *domaine* D limité par les valeurs a_1 et a_2 de x, b_1 et b_2 de $y, \ldots$ lorsqu'on peut donner à $x, y, \ldots$ respectivement toutes les valeurs comprises entre ces limites et, de plus, ces valeurs limites elles-mêmes. Les points où l'une des variables au moins prend une de ses valeurs limites forment la *frontière* du domaine D.

Lorsque les variables $(x, y, \ldots)$ varient dans le domaine D, la fonction $f(x, y, \ldots)$ peut être bornée supérieurement et inférieurement. Dans ce cas, ses *limites supérieure et inférieure* et son *oscillation* se définissent comme dans le cas des fonctions d'une seule variable.

Ce que nous avons dit (nº 21) de ces divers éléments, dans le cas où l'on considère le partage d'un intervalle (a, b) en plusieurs autres, peut évidemment se répéter si l'on considère le partage en plusieurs autres d'un domaine D.

29. Représentation géométrique. — Quand on considère deux variables x et y seulement, leur variation simultanée se représente géométriquement par le déplacement d'un point M du plan qui a pour

coordonnées rectangulaires x et y. Le domaine D limité par les valeurs a_1 et a_2 de x, b_1 et b_2 de y est alors figuré par le rectangle dont les côtés ont pour équations $x = a_1$, $x = a_2$ et $y = b_1$, $y = b_2$. Quand x et y varient dans ce domaine, le point représentatif du système peut prendre toutes les positions comprises dans l'intérieur et sur le contour du rectangle. Par allusion à cette représentation, un système de valeurs de x et y s'appelle un point, le système a, b le point (a, b), etc. La représentation géométrique s'étend au cas de trois variables à condition de considérer le déplacement du point M dans l'espace. Au delà, la représentation géométrique fait défaut, mais la terminologie que nous venons d'indiquer s'étend au cas général.

30. Définitions relatives à la continuité. — I. *Une fonction $f(x, y,...)$ est continue au point $(a, b,...)$ si $f(x, y,...)$ a pour limite $f(a, b,...)$ quand $x, y,...$ tendent respectivement vers $a, b...$, d'une manière quelconque ; ou, ce qui revient au même, si l'oscillation de $f(x, y,...)$ dans le domaine infiniment petit limité par les valeurs $a \pm \varepsilon$ de x, $b \pm \eta$ de y,... a pour limite 0 quand $\varepsilon, \eta,...$ tendent vers zéro.*

II. *On dit que $f(x, y,...)$ est continue dans le domaine* D *limité par les valeurs a_1 et a_2 de x, b_1 et b_2 de y,.., si elle est continue en tout point intérieur à ce domaine et en tout point de sa frontière. Seulement, sur la frontière du domaine* D, *la condition de continuité, exprimée par l'équation*

$$\lim f(x, y,...) = f(\lim x, \lim y,...),$$

est seulement relative au cas où les variables tendent vers leurs limites sans sortir du domaine D.

Une fonction $f(x, y,...)$ *est continue dans le voisinage d'un point* $(a, b,...)$ lorsqu'elle est continue dans un domaine suffisamment petit, comprenant ce point, sans que ce point fasse partie de la frontière de ce domaine.

III. Lorsqu'une fonction n'est pas continue au point $(a, b,...)$, on dit qu'elle est *discontinue* en ce point.

31. Continuité des fonctions composées. — I. *La somme, le produit, le quotient de deux fonctions continues sont des fonctions continues, sauf si une fonction prise comme diviseur s'annule.*

La démonstration est la même que pour les fonctions d'une seule variable (n° 24).

II. *Si $u, v, \ldots$ sont des fonctions continues de $x, y, \ldots$ et si $\mathrm{F}(u, v, \ldots)$ est une fonction continue de $u, v, \ldots$, F sera aussi fonction continue de $x, y \ldots$.*

Faisons tendre $x, y, \ldots$ vers $x_0, y_0, \ldots$ et soient $u_0, v_0, \ldots$ les valeurs de $u, v, \ldots$ en ce point. Les fonctions étant continues, on aura effectivement :

$$\lim \mathrm{F}(u, v, \ldots) = \mathrm{F}(\lim u, \lim v, \ldots) = \mathrm{F}(u_0, v_0, \ldots)$$

De là nous concluons encore que les fonctions composées de plusieurs variables ne peuvent devenir discontinues que si l'une des fonctions composantes devient discontinue ou si l'on doit faire une division par zéro. Ce résultat généralise celui obtenu au (n° 24) et le renferme comme cas particulier.

32. Discontinuité. — Si la fonction $f(x, y, \ldots)$ n'est pas continue au point $(a, b, \ldots)$, elle peut être illimitée dans le domaine $(a \pm \varepsilon, b \pm \eta, \ldots)$ quelque petit que soit ce domaine. On dit alors que la *discontinuité* au point $(a, b, \ldots)$ est infinie. Sinon, l'oscillation de $f(x, y, \ldots)$ sera elle même variable si l'on suppose que $\varepsilon, \eta, \ldots$ tendent vers zéro. La limite inférieure de cette variable s'appelle la *discontinuité* de $f(x, y, \ldots)$ au point $(a, b, \ldots)$.

33. Les fonctions continues de plusieurs variables jouissent de propriétés analogues à celles d'une seule variable. Comme la généralisation se fait d'elle-même, nous allons les exposer en nous bornant, pour plus de simplicité, aux fonctions de deux variables. Nous établirons d'abord le théorème suivant :

Théorème. — *Soient ε un nombre positif et $f(x, y)$ une fonction de deux variables x, y, qui varient dans un domaine rectangulaire D. S'il est impossible, en menant dans l'intérieur du rectangle D des parallèles aux côtes, de le décomposer en un nombre suffisant de domaines rectangulaires suffisamment petits pour que l'oscillation de $f(x, y)$ dans chacun d'eux soit $< \varepsilon$, il y a dans le domaine D un point au moins où la discontinuité de $f(x, y)$ est $=$ ou $> \varepsilon$.*

En effet, décomposons D en quatre rectangles égaux par les droites qui joignent les milieux des côtés opposés ; l'impossibilité supposée dans le théorème subsistera dans l'une au moins des quatre parties, par exemple dans D_1. Partageons D_1 en quatre rectangles égaux de la même manière ; l'impossibilité subsistera encore, dans l'une au moins, D_2, des quatre parties. Partageons encore D_2 et continuons ainsi de suite indéfiniment ; nous formerons une suite indéfinie de rectangles $\mathrm{D}, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \ldots \mathrm{D}_n, \ldots$ successivement intérieurs les uns aux autres et de côtés indéfiniment décroissants. Désignons en général par (a_n, b_n) les coordonnées du sommet du rectangle D_n qui a les plus petites coordonnées ; alors les

suites de quantités $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ et $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$ seront stationnaires ou croissantes et comme elles restent finies, elles convergeront vers des valeurs déterminées ξ et η. Le point (ξ, η) sera à l'intérieur ou sur le contour d'un rectangle D_n arbitrairement petit et dans lequel l'oscillation de $f(x, y)$ est $=$ ou $> \varepsilon$. Donc la discontinuité de cette fonction au point (ξ, η) sera $=$ ou $> \varepsilon$. C. Q. F. D.

Le point (ξ, η) peut être situé sur le contour du rectangle D, mais alors il est à remarquer que la discontinuité sera $=$ ou $> \varepsilon$ en ce point, même si l'on ne tient aucun compte, pour le déterminer, des valeurs de $f(x, y)$ à l'extérieur du rectangle D. La discontinuité dont il s'agit est relative à la variation de $f(x, y)$ dans le rectangle D exclusivement.

34. Propriétés des fonctions continues de deux variables. — I. *Si $f(x, y)$ est continue dans le domaine rectangulaire* D *et qu'on divise* D *en domaines rectangulaires partiels, à tout nombre ε, si petit qu'il soit, correspond un nombre δ tel que l'oscillation de $f(x, y)$ soit inférieure à ε dans chaque domaine partiel, pourvu que tous ces domaines aient leurs côtés $< \delta$.*

Remarquons d'abord qu'il existe au moins un mode de subdivision en parties rectangulaires, tel que l'oscillation de $f(x, y)$ soit $< \frac{\varepsilon}{4}$ dans chaque partie, sinon le théorème du n° précédent prouverait que la fonction est discontinue dans le domaine D. Supposons ce résultat obtenu par un premier mode de subdivision en rectangles dont les côtés soient tous $> \delta$; je dis que cette quantité δ réalise la condition du théorème. En effet, dans tout mode de subdivision de D en rectangles de côtés $< \delta$, une partie quelconque ne peut s'étendre sur plus de quatre rectangles différents du premier mode de subdivision, donc, dans cette partie, l'oscillation de $f(x, y)$ ne surpassera pas $4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$.

II. *Une fonction continue dans le domaine* D *est bornée supérieurement et inférieurement dans ce domaine.*

Donnons-nous un nombre ε et décomposons D en parties assez petites pour que l'oscillation de $f(x, y)$ dans chacune d'elles soit $< \varepsilon$, ce qui est possible d'après la propriété précédente. Soit n le nombre de ces parties et (a, b) un point quelconque de D, à l'intérieur de D, $f(x, y)$ restera comprise entre $f(a, b) - n\varepsilon$ et $f(a, b) + n\varepsilon$.

III. *Une fonction continue dans le domaine* D *atteint dans ce domaine ses limites supérieures et inférieures.*

Même démonstration que dans le cas d'une seule variable (n° 27).

§ 6. Fonctions élémentaires.

35. Les définitions des fonctions exponentielle et logarithmique appartiennent aux éléments de l'algèbre. Ces définitions et les pro-

priétés fondamentales de ces fonctions sont déjà familières à ceux qui abordent l'étude de l'analyse infinitésimale. En les rappelant brièvement ci-dessous, notre but est de les rattacher aux principes généraux et de faire saisir dans son ensemble la chaîne des déductions qui y conduisent.

36. Exposants fractionnaires. — Dans sa signification primitive, un exposant indique le nombre des facteurs égaux d'un produit : x^m désigne le produit de m facteurs égaux à x. On généralise déjà en algèbre élémentaire la notion des exposants par la définition des exposants fractionnaires. Si a désigne un nombre positif quelconque, l'équation $x^n = a$ où n est un entier positif a une racine positive et une seule que l'on appelle la *racine arithmétique* $n^{ième}$ de a. On la représente par $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$. On pose ensuite, par définition, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $x^0 = 1$, $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}}$, α désignant une fraction quelconque. Ces définitions suffisent pour établir, sans aucune difficulté, toutes les règles du calcul des exposants rationnels positifs et négatifs. Nous supposerons ces résultats acquis dans les éléments.

37. Fonction exponentielle. — Soit a un nombre positif, la définition de la fonction a^x résulte de celle des exposants fractionnaires pour toutes les valeurs rationnelles de x. Lorsque x varie *sans cesser d'être rationnel*, la fonction a^x est continue pour chaque valeur de x et elle varie en croissant de 0 à 1 et de 1 à ∞ quand x lui-même varie dans le même sens de $-\infty$ à 0 et de 0 à ∞. Cette propriété permet de définir, par un passage à la limite, la fonction a^x pour les valeurs irrationnelles de x et de donner, par conséquent, la *définition des exposants irrationnels*. Si α est irrationnel a^{α} sera la limite de a^x quand x tendra vers α sans cesser d'être rationnel. La fonction a^x se trouve maintenant définie pour toutes les valeurs réelles de x, elle est encore constamment croissante avec x et continue pour toutes les valeurs de la variable.

Les propriétés essentielles de la fonction exponentielle sont exprimées par les équations

$$a^x a^y = a^{x+y}, \qquad (a^x)^m = a^{mx}.$$

Celles-ci se démontrent directement dans le cas des exposants fractionnaires et elles s'étendent par un passage à la limite au cas des exposants irrationnels. Nous supposerons encore ces résultats acquis dans les éléments.

38. Fonction logarithmique. — Soit a un nombre > 1 ; le logarithme d'un nombre positif m dans le système de logarithmes dont la base est a est l'exposant auquel il faut élever a pour reproduire m. Tout nombre

positif m a un logarithme et un seul dans la base a, car a^x croissant de 0 à ∞ quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$, l'équation $a^x = m$ a une racine et une seule. Nous représenterons cette racine par $\mathrm{Log}_a x$.

La fonction $\mathrm{Log}_a x$ est définie par là pour toutes les valeurs réelles et positives de x sauf $x = 0$; elle croît successivement de $-\infty$ à 0, de 0 à 1 et de 1 à l'infini, quand x lui même croît de 0 à 1 de 1 à a et de a à l'infini. Elle est continue pour toutes les valeurs de x sauf $x = 0$.

Ses propriétés fondamentales correspondent à celles de l'exponentielle a^x, elle sont exprimées par les équations

$$\mathrm{Log}_a x + \mathrm{Log}_a y = \mathrm{Log}_a xy, \qquad \mathrm{Log}_a x^m = m\,\mathrm{Log}_a x.$$

39. Puissance quelconque. — Lorsque la variable x est positive, la puissance x^a est définie par ce qui précède pour toutes les valeurs réelles, rationnelles ou non, de a. On a, en effet, le logarithme étant pris dans la base A,

$$x^a = [\mathrm{A}^{\mathrm{Log}\,x}]^a = \mathrm{A}^{a\,\mathrm{Log}\,x}$$

Cette fonction s'exprime donc au moyen des fonctions exponentielle et logarithmique. Elle est continue pour toutes les valeurs de $x > 0$.

40. Fonctions circulaires directes. — Les fonctions trigonométriques sont définies dans les éléments par des considérations géométriques. Nous supposerons connues leurs propriétés les plus élémentaires. Toutes les fonctions trigonométriques peuvent se définir au moyen de l'une d'elles, considérée comme fondamentale, par exemple $\sin x$, au moyen des formules :

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \mathrm{cosec}\,x = \frac{1}{\sin x}.$$

Il y a lieu de rappeler ici le mode de variation de ces fonctions, sur lequel on s'appuie pour établir l'existence des fonctions inverses.

I. La fonction $\sin x$ ne peut varier que de -1 à $+1$; elle est continue pour toutes les valeurs de x ; elle croît constamment quand x croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, de sorte qu'elle prend une fois et une fois seulement chacune de ses valeurs quand x varie dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Quand x varie de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$, la fonction repasse par les mêmes valeurs en sens inverse. Puis les mêmes variations se reproduisent périodiquement chaque fois que x augmente d'une circonférence. Le sinus est donc une *fonction périodique* de période 2π, et par suite, toutes les autres fonctions circulaires auront cette même période.

II. La fonction $\operatorname{tg} x$ peut prendre des valeurs quelconques. Si x varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, cette fonction croît de $-\infty$ à $+\infty$ et elle est continue, sauf pour les valeurs limites de x qui la rendent infinie. Elle passe donc une fois et une fois seulement par chacune de ses valeurs, quand x varie dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. La fonction a pour période π, ce qui fait connaître son mode de variation dans un intervalle quelconque.

41. Fonctions circulaires inverses. — Les fonctions circulaires étant périodiques, reprennent la même valeur pour une infinité de valeurs de la variable. Donc leurs inverses, ayant une infinité de valeurs pour chaque valeur de la variable, sont des fonctions à déterminations multiples. Nous allons montrer toutefois que l'on peut associer ces valeurs entre elles, de manière à constituer une infinité de fonctions distinctes, mais dont chacune sera simple et continue. Nous appellerons celles-ci les *branches* de la fonction primitive.

1° La fonction $y = \operatorname{arc} \sin x$ est la fonction inverse du sinus, c'est la fonction implicite y, définie par l'équation

$$x = \sin y.$$

Quand y croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, x passe une seule fois par chacune des valeurs comprises entre -1 et $+1$. Donc à chaque valeur de x dans l'intervalle $(-1, +1)$ ne correspond qu'une seule valeur de y dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Nous dirons que cette valeur est la *valeur principale* de arc sin x.

La valeur principale de arc sin x varie d'une manière continue avec x et elle croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ quand x croît de -1 à $+1$; elle définit donc une branche de la fonction arc sin x. Nous l'appellerons la *branche principale* et nous conviendrons de considérer cette branche, chaque fois que le contraire ne sera pas dit expressément.

La fonction a une infinité d'autres branches. Mais il est facile de les ramener à la principale. En effet, les seules valeurs qui laissent $\sin y$ invariable s'obtiennent en changeant y en $\pi - y$ ou en ajoutant à l'un ou l'autre de ces deux arcs un nombre entier positif ou négatif de circonférences. Donc toutes les autres valeurs de l'arc sinus peuvent s'exprimer au moyen de la principale par l'un des deux groupes de formules :

$$y = \operatorname{arc} \sin x + 2k\pi,$$
$$y = (\pi - \operatorname{arc} \sin x) + 2k\pi,$$

où arc sin x reçoit sa valeur principale et où l'on donne à k une valeur entière quelconque. En même temps, chacune de ces formules définit une branche distincte de la fonction.

La fonction arc sin x n'a de sens, d'apres ce qui précède, que si x est compris dans l'intervalle $(-1, +1)$; en dehors de cet intervalle, l'expression arc sin x, au moins jusqu'à présent, ne représente plus rien.

2° La fonction $y =$ arc cos x se ramène à la précédente par la relation

$$x = \cos y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$$

d'où l'on tire

$$\frac{\pi}{2} - y = \text{arc} \sin x$$

$$\text{arc} \cos x = \frac{\pi}{2} - \text{arc} \sin x$$

Nous appellerons *valeur principale* de arc cos x, celle qu'on déduit de cette formule en donnant à arc sin x sa valeur principale. Cette valeur principale est une fonction simple et continue de x ; elle varie de π à 0 quand x varie de -1 à $+1$. C'est la *branche principale* de la fonction. Les autres branches s'obtiendront en fonction de la principale par les formules correspondant à celles relatives à l'arc sinus :

$$y = 2k\pi + \text{arc} \cos x$$
$$y = 2k\pi - \text{arc} \cos x$$

Comme l'arc sinus, l'arc cosinus n'a de sens que si la variable est comprise dans l'intervalle $(-1, +1)$.

3° La fonction $y =$ arc tg x a, pour chaque valeur positive ou négative de x, une valeur et une seule satisfaisant aux conditions

$$-\frac{\pi}{2} < \text{arc tg}\, x < \frac{\pi}{2}.$$

Nous dirons que c'est la *valeur principale* de arc tg x, Celle-ci définit la branche principale de la fonction. Elle croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$. Les valeurs de l'arc pour laquelle la tangente reprend la même valeur diffèrent entre elles d'un multiple entier quelconque de π; donc toutes les autres branches de la fonction arc tg$x$ s'exprimeront, au moyen de la première, par le seul système de formules

$$y = \text{arc tg}\, x + k\pi.$$

4° Les autres fonctions inverses se ramèneront aux précédentes par les formules, correspondant aux trois dernières du n° 40,

$$\text{arc cot } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg} x,$$

$$\text{arc sec } x = \text{arc cos } \frac{1}{x},$$

$$\text{arc cosec } x = \text{arc sin } \frac{1}{x}.$$

Exercices.

1. *Toute fonction $f(x)$ qui reste bornée dans un intervalle aussi petit qu'il soit $(0, \varepsilon)$ et qui satisfait, pour toutes valeurs réelles de x et de y, à la relation*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

est de la forme $f(x) = ax$, a constant.

En raisonnant de proche en proche, on déduit d'abord de la relation donnée que l'on a, m et n étant des entiers quelconques,

$$f(mx+n) = m f(x) + n f(1)$$

Prenons $m > 1 : \varepsilon$; faisons varier x d'une manière quelconque dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{m}\right)$ et faisons tendre l'entier n vers l'infini. La variable $mx + n = \xi$ tendra vers l'infini d'une manière arbitraire et l'on déduira de l'équation précédente, puisque $f(x)$ reste bornée par hypothèse,

$$\lim_{\xi = \infty} \frac{f(\xi)}{\xi} = \lim \frac{m f(x) + n f(1)}{mx + n} = f(1) = a.$$

Prenons ensuite $n = 0$ et faisons tendre m vers l'infini ; on déduira de la même équation, en tenant compte du résultat précédent,

$$\frac{f(x)}{x} = \lim_{m = \infty} \frac{f(mx)}{mx} = f(1) = a.$$

2. *La seule fonction qui reste bornée dans un intervalle si petit qu'il soit $(0, \varepsilon)$, qui n'est pas constamment nulle et qui satisfait pour toute valeur de x à l'égalité*

$$f(x+y) = f(x) f(y)$$

est la fonction $f(x) = A^x$, A constant.

On déduit d'abord de cette relation $f(2x) = f(x)^2$, $f(0) = f(x) f(-x)$; donc : 1° $f(x)$ est toujours positive ; 2° si $f(x)$ n'est pas nulle, la limite inférieure de $f(x)$ est > 0 dans l'intervalle $(0, \varepsilon)$.

On posera donc $\text{Log} f(x) = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ sera bornée dans l'intervalle $(0, \varepsilon)$ et on appliquera la propriété de l'exercice précédent.

On remarquera : 1° que dans ces théorèmes, on ne postule pas la continuité de la fonction ; 2° que si l'on ne considérait que les valeurs rationnelles de x, il serait inutile de supposer d'avance $f(x)$ bornée.

§ 7. Logarithmes naturels.

La définition des logarithmes naturels repose sur les deux théorèmes suivants :

42. Théorème I. — *Soit α une variable > -1 et qui varie sans s'annuler ni changer de signe : 1° La fonction*

$$\varphi(\alpha) = (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

est une fonction continue de α ; 2° elle varie en sens contraire de α.

Soit $u = \frac{\text{Log}\,(1+\alpha)}{\alpha}$ le logarithme de $\varphi(\alpha)$ dans une base A quelconque ; c'est une fonction continue de α pour toutes les valeurs considérées, donc $\varphi(\alpha) = A^u$ l'est aussi, puisque cette exponentielle est fonction continue de u.

Pour démontrer la seconde partie du théorème, nous partirons de l'identité suivante

$$a^{n+1} - 1 = (a-1)(a^n + a^{n-1} + \ldots + a + 1),$$

dans laquelle a désigne un nombre positif quelconque et n un nombre entier positif.

Comme la dernière parenthèse est $>$ ou $<$ $(n+1)$ suivant que a est $>$ ou $<$ 1, ou que le facteur $(a-1)$ est positif ou négatif, on a, dans les deux cas,

$$a^{n+1} - 1 > (n+1)(a-1).$$

Soit ω un nombre quelconque mais $> -n$. Nous pouvons, dans cette inégalité, remplacer a par le quotient $\left(1+\frac{\omega}{n+1}\right) : \left(1+\frac{\omega}{n}\right)$, ce qui rend le second membre égal à $1 : \left(1+\frac{\omega}{n}\right)$; multiplions ensuite les deux membres par $\left(1+\frac{\omega}{n}\right)^{n+1}$, nous obtenons

$$\left(1+\frac{\omega}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{\omega}{n}\right)^n.$$

Soit m un entier $> n$; on en conclut, de proche en proche,

$$\left(1+\frac{\omega}{m}\right)^m > \left(1+\frac{\omega}{n}\right)^n.$$

Elevons les deux membres à la puissance positive ou négative $\frac{1}{\omega}$, on voit que l'on aura, dans les deux cas,

$$\left(1+\frac{\omega}{m}\right)^{\frac{m}{\omega}} > \left(1+\frac{\omega}{n}\right)^{\frac{n}{\omega}}, \qquad \text{si } \frac{m}{\omega} > \frac{n}{\omega},$$

car ces deux inégalités changent en même temps de sens avec le signe de ω. Remplaçons encore ω par $m\alpha$, il viendra

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(1+\frac{m}{n}\alpha\right)^{\frac{n}{m\alpha}}, \qquad \text{si } \alpha < \frac{m}{n}\alpha.$$

Cette inégalité prouve le théorème pour deux valeurs de même signe α et $\frac{m}{n}\alpha$, dont le quotient est rationnel. Pour étendre la démonstration au cas de deux valeurs α et $\beta > \alpha$, dont le rapport est irrationnel, on fera tendre $\frac{m}{n}\alpha$ vers β par une suite de valeurs croissantes ; le second membre de l'inégalité précédente, $\varphi\left(\frac{m}{n}\alpha\right)$, sera constamment décroissant et l'on aura, à la limite, puisque la fonction est continue,

$$\varphi(\alpha) > \varphi(\beta), \qquad \text{si } \alpha < \beta,$$

ce qui établit le théorème dans tous les cas.

43. Théorème II. Définition du nombre e. — *La fonction $\varphi(\alpha)$ du théorème précédent tend vers une limite déterminée et unique, quand α tend vers zéro d'une manière quelconque. C'est cette limite que l'on désigne par e.*

Considérons deux variables simultanées α et β, liées par la condition

$$1+\alpha = \frac{1}{1+\beta};$$

on aura la relation, facile à vérifier,

$$\varphi(\alpha) = (1+\beta)\,\varphi(\beta).$$

Faisons tendre α vers zéro par une suite de valeurs croissantes (donc négatives), β sera positif et tendra vers zéro par une suite de valeurs décroissantes. Donc $\varphi(\alpha)$ variera en décroissant et $\varphi(\beta)$ en croissant, en vertu du théorème précédent. Mais $\varphi(\alpha)$ étant positive, reste finie et tend, par conséquent, vers une limite déterminée. Désignons cette limite par e ; la dernière équation, dans laquelle $(1+\beta)$ tend vers l'unité, nous donnera, à la limite,

$$e = \lim \varphi(\alpha) = \lim \varphi(\beta) ;$$

ce qui prouve que la limite est la même, quel que soit le signe de la variable.

Pour évaluer cette limite, nous remarquons que les quantités $\varphi(\beta)$ et $\varphi(\alpha) = (1+\beta)\,\varphi(\beta)$, tendant vers leur limite la première en crois-

sant et la seconde en décroissant, on a, pour toute valeur positive de β,

$$\varphi(\beta) < e < (1 + \beta)\,\varphi(\beta).$$

Ces inégalités permettent, en donnant à β une valeur suffisamment petite, de calculer e avec l'approximation que l'on désire. En y faisant $\beta = \frac{1}{2}$ on voit déjà que e est compris entre $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ et $\left(\frac{3}{2}\right)^3$ et *à fortiori* entre 2 et 4. Nous indiquerons plus tard des méthodes plus expéditives pour calculer e. Ce nombre a pour valeur approchée par défaut

$$e = 2{,}71828\ldots$$

Remarque. — Il résulte des deux théorèmes précédents que, si l'on attribue à la fonction $\varphi(\alpha)$ sa valeur limite pour $\alpha = 0$, cette fonction sera une fonction continue et constamment décroissante de α, pour toutes les valeurs de $\alpha > -1$.

44. Logarithmes naturels. — Les logarithmes naturels sont ceux qui ont pour base le nombre e, dont nous venons de démontrer l'existence dans le n° précédent, et qui est > 1, ainsi qu'on vient de le voir. Ces logarithmes sont ceux qui jouent le rôle le plus important dans l'analyse. C'est pourquoi nous nous servirons, pour représenter le logarithme naturel de x, de la notation $\operatorname{Log} x$ sans indice, tandis que $\operatorname{Log}_A x$ désignera celui d'un système de base quelconque A.

Les logarithmes naturels jouissent d'une propriété qui les caractérise. Si α tend vers zéro d'une manière quelconque, on aura d'après la définition du nombre e

$$\lim \frac{\operatorname{Log}(1+\alpha)}{\alpha} = \lim \operatorname{Log}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \operatorname{Log} e = 1.$$

§ 8. Nombres complexes.

45. On donne le nom de *nombre complexe* ou *imaginaire* à l'ensemble de deux nombres réels a et b, rangés dans un certain ordre, et l'on représente cet ensemble par la notation

$$a + bi.$$

Les expressions de cette forme sont soumises à des règles de calcul conventionnelles. C'est dans l'énoncé de ces règles que consiste la définition mathématique des quantités complexes. Le symbole i n'a aucun sens par lui-même, il sert seulement à maintenir séparés l'un de l'autre les deux nombres a et b qui jouent un rôle différent dans les opérations que nous allons définir. Le signe $+$ sert à marquer la connexion des

deux nombres a et b et son emploi se justifiera de lui-même un peu plus loin.

Le calcul des quantités complexes repose sur les huit conventions suivantes que nous indiquerons en les numérotant :

46. La première convention est relative à l'*égalité*. On écrit

$$\text{(I)} \qquad a + bi = a' + b'i,$$

si l'on a séparément $a = a'$ et $b = b'$, de sorte qu'une équation entre quantités complexes revient à deux équations entre quantités réelles.

Les trois conventions suivantes, où la notation elle-même joue un rôle essentiel, sont exprimées par les trois équations :

$$\text{(II)} \qquad a + 0i = a,$$
$$\text{(III)} \qquad 0 + bi = bi,$$
$$\text{(IV)} \qquad 0 + 1i = i.$$

Elles font rentrer respectivement dans l'ensemble des quantités complexes les quantités réelles, les expressions de la forme bi que l'on appelle *purement imaginaires* et enfin le symbole i lui-même que l'on appelle l'*unité imaginaire*.

Les quantités réelles rentrant maintenant dans les quantités complexes, il faudra prendre soin, dans les définitions suivantes, de n'introduire aucune règle qui contredise celles déjà établies pour les quantités réelles.

La règle II montre qu'une quantité imaginaire n'est nulle ou égale à zéro que si l'on a séparément :

$$a = 0, \qquad b = 0.$$

La quantité réelle et positive $\sqrt{a^2 + b^2}$ est ce qu'on appelle le *module* de la quantité $(a + bi)$ et on le représente par $|a + bi|$. Un nombre complexe sera donc nul si son module est nul et ne sera nul que dans ce cas.

47. L'*addition* et la *multiplication* sont définies par les équations

$$\text{(V)} \qquad (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i.$$
$$\text{(VI)} \qquad (a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

que l'on est en droit de poser, car elles se réduisent à des identités quand leurs termes sont réels. Donc *la somme* et *le produit* de deux nombres complexes sont de nouveaux nombres complexes entièrement déterminés. Il est à peine nécessaire de faire remarquer que ces définitions sont faites de manière à conserver les propriétés commutatives, associatives et distributives, qui correspondent aux relations :

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$
$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

aux relations analogues dans la multiplication et à l'équation

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Les équations V et VI donnent lieu à des cas particuliers remarquables :

1° Eu égard à II et III, l'équation V montre que $a + bi$ est la somme des deux nombres a et bi. Le nombre a est la partie réelle de $a + bi$ et le nombre bi est sa partie imaginaire.

2° Eu égard à IV, l'équation VI montre aussi que bi est le produit des deux nombres b et i.

Il résulte de là que l'emploi des signes d'opération dans la notation du nombre complexe $a + bi$ ne peut prêter à aucune confusion.

3° Si l'on fait, dans l'équation VI, $a = a' = 0$ et $b = b' = 1$, elle se réduit à

$$i^2 = -1.$$

Donc tous les calculs relatifs à l'addition et à la multiplication des quantités complexes pourront se faire par l'application des règles du calcul algébrique habituel, à condition de traiter le symbole i comme une quantité dont le carré serait égal à — 1. Cette propriété explique comment il se fait que le nombre i se soit introduit, en algèbre, sous la forme $\sqrt{-1}$. L'usage que l'on a fait de cette notation sans la définir a fait considérer parfois l'existence des quantités complexes comme une sorte de paradoxe.

4° Si l'on fait, dans l'équation VI, $a' = a$ et $b' = -b$, elle donne

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Deux quantités complexes qui ne diffèrent que par le signe de la partie imaginaire sont dites *conjuguées*. On voit que le produit de deux quantités conjuguées est réel et positif et égal au carré du module de chacune de ces deux quantités. La quantité $a^2 + b^2$ s'appelle aussi la *norme* de la quantité complexe $a \pm bi$.

48. Les deux dernières conventions relatives au calcul des quantités complexes consistent dans les définitions de la soustraction et de la division. Nous conviendrons que ce sont les *opérations inverses* de l'addition et de la soustraction.

Soustraire $(a' + b'i)$ de $(a + bi)$ c'est déterminer le nombre $x + yi$ qui vérifie la condition

$$(a + bi) = (a' + b'i) + (x + yi) = (a' + x) + (b' + y)i.$$

Ce nombre $x + yi$ se représente par $(a + bi) - (a' + b'i)$. On aura donc, par la définition de l'égalité,

$$\text{(VII)} \qquad (a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i$$

et cette équation définit la *soustraction*.

Diviser $(a + bi)$ par $(a' + b'i)$ c'est trouver un nombre $x + yi$ appelé *quotient* qui vérifie la condition

$$(a + bi) = (a' + b'i)(x + yi),$$

ou en multipliant les deux membres par $a' - b'i$,

$$(a + bi)(a' - b'i) = (a'^2 + b'^2)(x + yi).$$

Le quotient se représente par $\frac{a + bi}{a' + b'i}$ et l'on a

$$\text{(VIII)} \qquad \frac{a + bi}{a' + b'i} = \left(\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}\right) + \left(\frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}\right) i.$$

Cette équation définit la *division*. Elle montre que la division est toujours possible et conduit à un résultat unique et bien déterminé pourvu que le diviseur ne soit pas nul.

49. Si, dans une somme, un produit, une différence, un quotient de nombres complexes, on remplace chaque terme par son conjugué, les formules précédentes montrent que les résultats seront aussi remplacés par leurs conjugués. Donc, dans toute relation entre quantités complexes qui ne comporte que les quatre opérations rationnelles, il est permis de remplacer i par $-i$.

Soit, par exemple, l'équation

$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + i(ab' - ba');$$

en la multipliant membre à membre avec sa conjuguée, on trouve

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' - bb')^2 + (ab' - ba')^2.$$

Donc *le module (la norme) d'un produit est égal au produit des modules (des normes) de chaque facteur.*

On conclut de là qu'*un produit de plusieurs facteurs s'annule et s'annule seulement* si *l'un des facteurs est nul.*

50. *Le module d'une somme ne peut pas surpasser la somme des modules de chaque terme.*

Ce théorème se vérifie d'abord pour les deux nombres 1 et $(a + bi)$, c'est-à-dire que l'on a, en posant $a + bi = \beta$,

$$1 + |\beta| = 1 + \sqrt{a^2 + b^2} \geqq \sqrt{(1 + a)^2 + b^2} = |1 + \beta|.$$

En effet, élevée au carré, cette relation revient à la suivante

$$2\sqrt{a^2 + b^2} \geqq 2a,$$

qui est apparente et dans laquelle l'égalité ne peut avoir lieu que si b est nul et a positif, donc si β est réel et positif.

Ensuite la démonstration s'étend au cas général. En effet, soient α et α' deux nombres différents de zéro ; leur quotient n'étant pas nul, on peut poser $\alpha' = \beta\alpha$ et il vient

$$|\alpha| + |\alpha'| = |\alpha|\,(1 + |\beta|)$$
$$|\alpha + \alpha'| = |\alpha|\;|1 + \beta|\,.$$

Donc le module de $(\alpha + \alpha')$ sera inférieur à la somme des modules de α et de α' sauf si le quotient β de ces deux quantités est réel et positif.

Cette propriété peut aussi s'énoncer en disant que *le module d'une somme est au moins égal à la différence des modules de ses deux termes*, car les deux relations

$$|\alpha \pm \alpha'| < |\alpha| + |\alpha'|\,,$$
$$|\alpha \pm \alpha'| > |\alpha| - |\alpha'|\,,$$

se ramènent l'une à l'autre par le changement de α en $\alpha \mp \alpha'$.

51. Représentation géométrique des quantités complexes. — La quantité complexe $(a + bi)$ se représente géométriquement par une droite de longueur et de direction déterminée, menée à partir d'une origine arbitraire, et ayant comme composantes suivant deux axes rectangulaires les quantités a et b.

Si cette droite est menée à partir de l'origine des coordonnées, son extrémité M est un point déterminé, ayant pour coordonnées rectangulaires a et b. Le point M s'appelle l'*affixe* de la quantité complexe et peut aussi servir de représentation géométrique de cette quantité.

Les coordonnées polaires r et θ de l'affixe M jouent un rôle important dans l'étude de la quantité complexe. Elles sont définies par les relations $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$; d'où

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sin\theta = \frac{b}{r}$$

Le rayon vecteur r est le *module* de la quantité complexe. L'angle θ s'appelle son *argument*, il n'est déterminé qu'à un multiple près de 2π quand a et b sont donnés.

Cette représentation géométrique et la considération du module et de l'argument ont un intérêt particulier dans les diverses opérations précédemment définies.

La somme de plusieurs nombres complexes est représentée géométriquement par la résultante des droites représentatives de ses termes.

Si l'on fait le produit et le quotient de deux nombres complexes

$$a + bi = r\,(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$a' + b'i = r'\,(\cos\theta' + i\sin\theta'),$$

on trouve, par les propriétés connues des fonctions trigonométriques,

$$(a + bi)\,(a' + b'i) = rr'\left[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')\right],$$

$$\frac{a + bi}{a - bi} = \frac{r}{r'}\left[\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')\right].$$

Donc le module d'un produit est égal au produit des modules de ses facteurs et son argument à la somme de leurs arguments ; le module d'un quotient est égal au quotient des modules de ses deux termes et son argument à la différence de leurs arguments.

§ 9. Variables complexes et fonctions rationnelles d'une variable complexe.

52. Variables complexes. — Si x et y sont deux variables réelles, on dit que $x+yi$ est une *variable complexe*.

Si les variables x et y ont respectivement pour limites a et b, on dit que $x+yi$ a pour *limite* $a+bi$ et l'on écrit

$$\lim (x+yi) = a+bi.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $x+yi$ ait pour limite $a+bi$ est que

$$|(x+yi)-(a+bi)| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

ait pour limite zéro.

Cette condition est suffisante, car, si ce radical tend vers zéro, chacune des quantités de valeur absolue moindre $(x-a)$ et $(y-b)$ aura pour limite zéro. Elle est nécessaire, car ce radical tend aussi vers zéro avec $(x-a)$ et $(y-b)$.

Les principes généraux relatifs à la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient de variables réelles (n° 15) s'appliquent évidemment aussi aux variables complexes.

Une variable complexe qui a pour limite zéro est dite *infiniment petite*. Pour qu'une variable complexe soit infiniment petite, il est nécessaire et suffisant que son module soit infiniment petit.

53. Polynômes entiers. — Soit $z = x+yi$ une variable complexe et

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_n$$

un polynôme de degré n à coefficients réels ou complexes. A chaque valeur de z correspond une valeur bien déterminée de ce polynôme. On peut donc dire que ce polynôme est *une fonction de la variable complexe* z. De plus c'est une *fonction continue* pour toute valeur de z, ce qui veut dire que, si l'on fait tendre z vers une valeur particulière α d'une manière quelconque, on aura la condition

$$\lim_{z=\alpha} f(z) = f(\alpha).$$

On démontre, en algèbre, que le polynôme $f(z)$ peut toujours se décomposer en un produit de facteurs linéaires

$$f(z) = A_0 (z-\alpha)^\lambda (z-\beta)^\mu \cdots,$$

les lettres $\alpha, \beta, \ldots$ désignant des quantités réelles ou complexes et $\lambda, \mu, \ldots$ des entiers positifs. Le polynôme ne peut s'annuler que pour les valeurs $z = \alpha$, $z = \beta, \ldots$ que l'on appelle ses *racines*. Celles-ci sont simples ou multiples : les nombres $\lambda, \mu, \ldots$ sont les degrés de multiplicité des racines respectives $\alpha, \beta, \ldots$ La somme $\lambda + \mu + \ldots$ est égale à n. On énonce cette propriété en disant qu'un polynôme de degré n a toujours n racines.

54. Fonctions rationnelles. — Le quotient de deux polynômes

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

est ce qu'on appelle une *fonction rationnelle de z*. Sa valeur est bien déterminée pour toute valeur de z qui n'annule pas le dénominateur. On aura encore, d'après les principes rappelés plus haut (n° 52),

$$\lim_{z=\alpha} f(z) = f(\alpha),$$

sauf si α annule le dénominateur. Donc une fonction rationnelle est aussi une *fonction continue,* sauf pour les valeurs de z qui sont racines du dénominateur de la fraction et qui la rendent *infinie*.

Quand le dénominateur se réduit à une constante, la fraction se réduit à un polynôme entier. On dit aussi qu'un polynôme est une fonction *rationnelle et entière* de z.

L'expression $P(z) : Q(z)$ est *une fraction proprement dite* lorsque le degré du numérateur est moindre que celui du dénominateur. Si P était de degré plus élevé Q, en effectuant la division, on décomposerait P : Q en un quotient entier et une fraction proprement dite.

COURS D'ANALYSE INFINITESIMALE

CHAPITRE I.

Dérivation des fonctions explicites d'une variable.

§ 1. Dérivées et différentielles.

55. De la dérivée. — Soit $y = f(x)$ une fonction simple et continue de x dans un intervalle (a, b) et x un point de cet intervalle ; donnons à x un accroissement positif ou négatif $\Delta x = h$, l'accroissement Δy de la fonction sera $f(x + h) - f(x)$ et le rapport de ces accroissements

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Si ce rapport tend vers une limite déterminée lorsque h tend vers zéro d'une manière quelconque, cette limite s'appelle la *dérivée* de $f(x)$ au point x.

Si $f(x)$ admet une dérivée pour tous les points de l'intervalle (a, b), l'ensemble de ces valeurs constitue une nouvelle fonction que l'on représente par $f'(x)$ (Lagrange) ou par $\mathrm{D}f(x)$ (Cauchy).

56. Théorème. — *Toute fonction qui a une dérivée pour une valeur donnée de x est continue en ce point.*

En effet, l'égalité

$$\lim_{h=0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

donne

$$\lim [f(x + h) - f(x)] = \lim h\, f'(x) = 0.$$

57. Cas particuliers. — I. Si $f(x)$ *se réduit à une constante, sa dérivée sera nulle.*

On a, en effet, dans ce cas,

$$\lim \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim \frac{0}{h} = 0.$$

II. *Si $f(x) = x$, sa dérivée est égale à l'unité.*

On a, en effet,

$$\lim \frac{(x+h) - x}{h} = \lim \frac{h}{h} = 1.$$

58. Signification géométrique de la dérivée. — C'est le problème des tangentes aux courbes planes qui a conduit à la considération des rapports d'infiniment petits et à la définition de la dérivée. Nous allons montrer, en effet, que la détermination d'une tangente à une courbe plane revient à celle de la dérivée d'une fonction.

Considérons une courbe rapportée à des axes rectangulaires et soient x et y les coordonnées d'un point M de la courbe (fig. 1). Nous supposerons que celle-ci ait pour équation

$$y = f(x).$$

Pour définir la tangente à la courbe au point M, considérons une sécante MM' menée par ce point ; si, lorsque le point M' se rapproche indéfiniment du point M, la sécante MM' tend vers une position limite MT, cette limite se nomme la *tangente* à la courbe au point M.

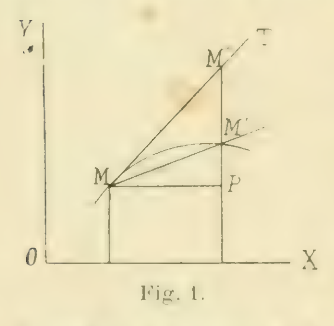


Fig. 1.

Le point M étant donné, la détermination de la tangente revient à celle de son coefficient angulaire τ, c'est-à-dire à celle de la tangente trigonométrique de l'angle que fait MT avec OX. Appelons σ le coefficient angulaire de la sécante MM' et désignons par $x + \Delta x$ et $y + \Delta y$ les coordonnées du point M'. Menons MP parallèle à OX ; on aura, dans le triangle rectangle MPM',

$$\sigma = \frac{M'P}{MP} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Quand M' se rapproche indéfiniment du point M, σ a pour limite τ. Il vient donc

$$\tau = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

La dérivée de la fonction $f(x)$ est donc égale au coefficient angulaire de la tangente à la courbe qui a pour équation $y = f(x)$, cette tangente étant menée au point de coordonnées x, y.

59. Des différentielles. — La différentielle d'une fonction $f(x)$ est,

par définition, le produit de la dérivée $f'(x)$ par l'accroissement Δx de la variable indépendante. Cette différentielle se représente par $d\,f(x)$. On a donc, par définition,

$$(1) \qquad d\,f(x) = f'(x)\,\Delta x$$

Dans le cas particulier où $f(x)$ se réduit à x, on a vu que $f'(x) = 1$, de sorte que l'équation précédente se réduit à

$$(2) \qquad dx = \Delta x.$$

La différentielle de la variable indépendante se confond donc avec l'accroissement généralement arbitraire de cette variable.

La formule (1) peut ainsi être remplacée dans le cas général par

$$(3) \qquad d\,f(x) = f'(x)\,dx.$$

Donc *la différentielle d'une fonction est le produit de sa dérivée par la différentielle de la variable indépendante.*

Si l'on divise cette formule par dx, on trouve

$$(4) \qquad f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx}.$$

Donc la dérivée d'une fonction est égale au rapport de la différentielle de la variable à la différentielle de la fonction, ce qui fournit une nouvelle expression de la dérivée (Leibnitz) et celle qui est la plus employée.

Remarque. — La substitution de dx à Δx dans l'équation (1) n'a rien de nécessaire, mais elle est consacrée par l'usage et cet usage est justifié. Nous verrons en effet (nº 61, V) que l'équation (3) est plus générale que l'équation (1) : celle-ci suppose que x soit la variable indépendante tandis que l'équation (3) n'est pas soumise à cette restriction.

60. Signification géométrique des différentielles. — La différentielle est aussi susceptible d'une interprétation géométrique qui se rattache à celle de la dérivée. Considérons encore la courbe, rapportée à des axes rectangulaires, qui a pour équation

$$y = f(x).$$

Menons la tangente au point M qui a pour coordonnées x et y. Donnons ensuite à x un accroissement arbitraire Δx et soit M'' le point de la tangente qui a pour abscisse $x + \Delta x$. On aura $\Delta x = \text{MP}$ (fig. 1) et l'accroissement correspondant de l'ordonnée de la tangente sera PM''. Or on a

$$\text{M''P} = \text{MP}\ \text{tg}\,(\text{PMM''}) = \Delta x f'(x) = d\,f(x).$$

La différentielle de $f(x)$ est donc égale à l'accroissement de l'ordonnée

de la tangente à la courbe $y = f(x)$, lorsqu'on passe de l'abscisse x du point de contact à une autre abscisse $x + \Delta x$.

61. Règles de dérivation. — L'opération par laquelle on détermine la dérivée d'une fonction s'appelle *dérivation* ; celle par laquelle on détermine la différentielle, *différentiation*. Le premier objet du calcul différentiel est d'établir les règles de ces opérations.

Nous examinerons d'abord le cas où la fonction proposée est *composée* au moyen d'un certain nombre de fonctions plus simples, dont la dérivée est supposée connue

I. *Dérivée d'une somme.* — Soit $y = u + v - w + \ldots$ une somme algébrique de fonctions ayant des dérivées connues u', v', w'.... Donnons à x un accroissement Δx et désignons par Δy, Δu, Δv, Δw,... les accroissements correspondants des fonctions ; on aura :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x} + \ldots$$

d'où, en faisant tendre Δx vers zéro et en passant à la limite.

$$y' = u' + v' - w' + \ldots$$

En multipliant les deux membres par dx, il vient

$$dy = du + dv - dw + \ldots$$

Donc la dérivée (ou la différentielle) d'une somme algébrique de fonctions est la somme des dérivées (des différentielles) de chacune de ces fonctions.

II. *Dérivée d'un produit.* — Soit $y = uv$ un produit de deux fonctions ayant des dérivées connues u' et v'. On aura :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}(v + \Delta v) + u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

et, en faisant tendre Δx vers zéro,

$$y' = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim (v + \Delta v) + u \lim \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'v + v'u.$$

En multipliant par dx, on trouve

$$dy = u\,dv + v\,du.$$

Donc la dérivée (ou la différentielle) d'un produit de deux facteurs est égale à la somme de chacun des facteurs, multipliés respectivement par la dérivée (ou la différentielle) de l'autre.

Si v se réduit à une constante a, sa dérivée et sa différentielle sont nulles, donc

$$\mathrm{D}.au = a\,\mathrm{D}u, \qquad d.au = a\,du.$$

On voit que la dérivée (ou la différentielle) du produit d'une fonction par une constante est égale au produit de la constante par la dérivée (ou la différentielle) de la fonction. On exprime cette propriété en disant qu'un facteur constant peut sortir du signe de dérivation (ou de différentiation).

On aura, par la même règle,

$$\mathrm{D}.uvw = vw\mathrm{D}u + u\mathrm{D}.vw = vw\mathrm{D}u + uw\mathrm{D}v + uv\mathrm{D}w$$

et, en général, quel que soit le nombre des facteurs,

$$\mathrm{D}.uvw\ldots = uvw\ldots\left(\frac{\mathrm{D}u}{u} + \frac{\mathrm{D}v}{v} + \frac{\mathrm{D}w}{w} + \ldots\right)$$

Si l'on fait $u = v = w = \ldots$ et si l'on suppose le nombre des facteurs égal à m, il vient (pour m entier)

$$\mathrm{D}u^m = mu^{m-1}\mathrm{D}u,$$

En particulier, si $u = x$,

$$\mathrm{D}x^m = mx^{m-1}.$$

Si l'on multiplie les deux dernières équations par dx, il vient

$$d.uvw\ldots = uvw\ldots\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots\right),$$

$$du^m = mu^{m-1}du.$$

III. *Dérivée d'un quotient.* — Soit $y = \dfrac{u}{v}$; on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \dfrac{u}{v}}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)},$$

d'où, en passant à la limite,

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Si l'on multiplie par dx, il vient

$$dy = d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Dans le cas particulier où u se réduit à une constante a, sa dérivée est nulle et il vient

$$\mathrm{D}\frac{a}{v} = -a\frac{\mathrm{D}v}{v^2}, \qquad d\frac{a}{v} = -a\frac{dv}{v^2}.$$

IV. *Dérivée d'une fonction inverse.* — Soit $y = f(x)$ une fonction admettant une fonction inverse de telle sorte qu'on ait $x = \varphi(y)$. Si

l'une de ces fonctions admet une dérivée différente de zéro, l'autre fonction aura aussi une dérivée et celle-ci s'obtiendra immédiatement.

Supposons connue la dérivée de φ par exemple. On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)}; \quad \text{mais} \quad \lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = \varphi'(y),$$

il viendra donc, à la limite,

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\varphi'[f(x)]}$$

Donc *la dérivée de y considérée comme fonction de x est l'inverse de la dérivée de x considérée comme fonction de y.*

Si l'on convient de représenter par un indice la variable considérée comme indépendante dans la dérivation, ou en d'autres termes, la variable par rapport à laquelle on dérive, la règle précédente pourra s'écrire

$$D_x y = \frac{1}{D_y x}.$$

V. *Dérivée d'une fonction de fonction.* — Soient $y = F(u)$ et $u = f(x)$, de sorte que y s'exprime en fonction de u, u étant lui-même fonction de x. Supposons que $F(u)$ et $f(x)$ aient des dérivées déterminées $F'(u)$ et $f'(x)$. On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

et à la limite, Δu tendant vers zéro avec Δx,

$$y' = F'(u) f'(x).$$

Donc *la dérivée de y par rapport à x est le produit des dérivées supposées existantes de y par rapport à u et de u par rapport à x.* Si ces dernières dérivées n'existaient pas, la règle ne serait plus applicable, mais il n'en résulterait pas nécessairement que y n'admît pas de dérivée par rapport à x.

Si l'on multiplie l'équation précédente par dx, on obtient

$$dy = F'(u)\,du.$$

Donc, *si $y = F(u)$, dy s'exprime au moyen de du comme si u était la variable indépendante.* Toutefois cette règle est soumise à cette restriction que du et $F'(u)$ sont supposés déterminés.

Cette règle est fondamentale, car elle montre que la différentielle d'une fonction de x se calcule toujours par les mêmes règles, qu'elle soit exprimée directement en fonction de x ou au moyen de variables auxiliaires.

62. Dérivées des fonctions élémentaires. — I. *Fonction exponentielle.* On a, par définition de la dérivée,

$$\mathrm{D}\, e^x = \lim_{h=0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h=0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Posons $e^h - 1 = \alpha$, d'où $h = \mathrm{Log}\,(1+\alpha)$; α aura pour limite 0 avec h. Donc

$$\lim \frac{e^h - 1}{h} = \lim \frac{\alpha}{\mathrm{Log}\,(1+\alpha)} = \frac{1}{\lim \mathrm{Log}\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{\mathrm{Log}\, e} = 1.$$

Il vient ainsi

$$\mathrm{D}\, e^x = e^x.$$

Donc la fonction e^x se reproduit par dérivation.

La dérivée d'une autre exponentielle quelconque s'obtient par la règle des fonctions de fonctions. On a

$$\mathrm{D}\, \mathrm{A}^x = \mathrm{D}\, e^{x \,\mathrm{Log}\, \mathrm{A}} = e^{x\, \mathrm{Log}\, \mathrm{A}}\, \mathrm{D}\, (x\, \mathrm{Log}\, \mathrm{A}) = \mathrm{A}^x\, \mathrm{Log}\, \mathrm{A}.$$

II. *Fonction logarithmique.* Considérons d'abord les logarithmes pris dans la base A et soit

$$y = \mathrm{Log}_{\mathrm{A}}\, x.$$

Cette fonction est l'inverse de l'exponentielle $x = \mathrm{A}^y$ et sa dérivée se calcule par la règle des fonctions inverses. On a

$$\mathrm{D}_x y = \frac{1}{\mathrm{D}_y x} = \frac{1}{\mathrm{A}^y\, \mathrm{Log}\, \mathrm{A}} = \frac{1}{x\, \mathrm{Log}\, \mathrm{A}}.$$

En particulier, si les logarithmes sont naturels, on a

$$\mathrm{D}\, \mathrm{Log}\, x = \frac{1}{x}.$$

III. *Puissance quelconque.* Soit a un nombre donné et x une variable positive. On a, par les propriétés des logarithmes,

$$x^a = e^{a\, \mathrm{Log}\, x}.$$

On en tire, par la règle des fonctions de fonctions,

$$\mathrm{D}\, x^a = e^{a\, \mathrm{Log}\, x}\, \mathrm{D}\, (a\, \mathrm{Log}\, x) = x^a \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

Donc, la règle établie précédemment (n° 61) pour a entier, est générale.

En particulier pour $a = \frac{1}{2}$, on a

$$\mathrm{D}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

IV. *Fonctions trigonométriques.* 1° Soit d'abord $y = \sin x$. On a, par définition,

$$\mathrm{D}\,y = \lim_{h=0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = 2 \lim_{h=0} \frac{\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}.$$

Or $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ a pour limite $\cos x$, il vient donc en remplaçant $h:2$ par α

$$\mathrm{D}\,y = \cos x \lim_{\alpha=0} \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

On sait, par les éléments de trigonométrie, qu'un arc moindre qu'un quadrant est compris entre son sinus et sa tangente ; donc, si α est positif, on a

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha, \qquad \text{d'où} \qquad 1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Ainsi, si α tend vers zéro en restant positif, $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ reste compris entre deux quantités qui ont pour limite l'unité et l'on a aussi (n° 18)

$$\lim \frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1.$$

D'ailleurs, comme $\alpha : \sin\alpha$ ne change pas de signe avec α, cette limite subsiste pour α négatif et on peut la substituer dans la valeur de $\mathrm{D}\,y$, ce qui donne

$$\mathrm{D}\,y = \mathrm{D}\sin x = \cos x.$$

2° On a ensuite par la règle des fonctions de fonctions,

$$\mathrm{D}\cos x = \mathrm{D}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{D}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

On conclut de là

$$\mathrm{D}\cos x = -\sin x.$$

3° La règle pour dériver un quotient donne

$$\mathrm{D}\operatorname{tg}x = \mathrm{D}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\,\mathrm{D}\sin x - \sin x\,\mathrm{D}\cos x}{\cos^2 x},$$

d'où

$$\mathrm{D}\operatorname{tg}x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

4° On trouve de même

$$\mathrm{D}\sec x = \mathrm{D}\frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x\sec x.$$

5° Enfin, en changeant x en $\frac{\pi}{2} - x$ dans les deux dernières fonctions, on obtient par la règle des fonctions de fonctions

$$\mathrm{D}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad \mathrm{D}\operatorname{cosec}x = -\cot x\operatorname{cosec}x.$$

V. *Fonctions trigonométriques inverses.* — 1° Soit $y = \text{arc sin } x$; la branche principale de la fonction est définie par les conditions

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Pour en trouver la dérivée, appliquons la règle des fonctions inverses. On a $x = \sin y$; donc

$$D_y x = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Ce radical doit être pris avec le signe $+$, car $\cos y$ est positif quand y varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$D_y x = +\sqrt{1 - x^2},$$

d'où

$$D_x y = \text{D arc sin } x = \frac{1}{+\sqrt{1 - x^2}}.$$

Les autres branches de la fonction arc sin x se partagent en deux classes liées à la principale par les deux systèmes de formules (n° 41) :

$$y = \text{arc sin } x + 2k\pi,$$
$$y = (\pi - \text{arc sin } x) + 2k\pi.$$

Les premières auront donc même dérivée que la branche principale et les secondes une dérivée de signe contraire.

2° La dérivée de $y = \text{arc tg } x$ s'obtient aussi par la règle des fonctions inverses. On a $x = \text{tg } y$; donc

$$D_y x = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \text{tg}^2 y = 1 + x^2.$$

On en conclut

$$D_x y = \text{D arc tg } x = \frac{1}{1 + x^2}$$

et le résultat est le même pour toutes les branches de la fonction.

3° Les dérivées des autres fonctions circulaires inverses se calculent au moyen des précédentes par les formules

$$\text{D arc cos } x = \text{D}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc sin } x\right) = -\text{D arc sin } x$$

$$\text{D arc cot } x = \text{D}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg } x\right) = -\text{D arc tg } x$$

$$\text{D arc sec } x = \text{D arc cos } \frac{1}{x} = -\frac{\text{D}\frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\text{D arc cosec } x = \text{D arc sin } \frac{1}{x} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

63. Différentielles des fonctions élémentaires. — Ces différentielles s'obtiennent en multipliant les dérivées par dx. On obtient ainsi le tableau suivant, qu'il est indispensable de connaître par cœur :

$d\,x^a = ax^{a-1}\,dx$	$d\sqrt{x} = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$
$d\,A^x = A^x \operatorname{Log} A\,dx$	$d \operatorname{Log}_A x = \dfrac{dx}{x \operatorname{Log} A}$
$d\,e^x = e^x\,dx$	$d \operatorname{Log} x = \dfrac{dx}{x}$
$d \sin x = \cos x dx$	$d \operatorname{arc\,sin} x = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$d \operatorname{tg} x = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$	$d \operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{dx}{1+x^2}$
$d \sec x = \operatorname{tg} x \sec x dx$	$d \operatorname{arc\,sec} x = \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
$d \cos x = -\sin x dx$	$d \operatorname{arc\,cos} x = -d \operatorname{arc\,sin} x$
$d \cot x = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$	$d \operatorname{arc\,cot} x = -d \operatorname{arc\,tg} x$
$d \operatorname{cosec} x = -\cot x \operatorname{cosec} x dx$	$d \operatorname{arc\,cosec} x = -d \operatorname{arc\,sec} x$

Il est essentiel de remarquer que les formules de ce tableau subsistent encore quand on y remplace la variable x par une fonction quelconque u de x. Ainsi

$$d\,A^u = A^u \operatorname{Log} A\,d\,u, \text{ etc.}$$

64. Différentiation des fonctions composées. — Les règles générales du nº 61 et les formules du tableau précédent suffisent pour déterminer la différentielle d'une fonction explicite quelconque y, pourvu qu'elle soit exclusivement composée par addition, soustraction, multiplication, division ou superposition du signe fonctionnel au moyen des fonctions élémentaires. En effet, par l'introduction de variables auxiliaires on ramènera la fonction y à des sommes, produits,... de simples lettres ou à des fonctions élémentaires d'une seule lettre. La différentielle s'exprimera par les règles des nºˢ 61 et 63 au moyen des différentielles des variables auxiliaires. On recommencera la même opération pour calculer les différentielles des variables auxiliaires et l'on continuera ainsi de suite jusqu'à ce que les différentielles puissent s'exprimer en fonction de x et de dx seulement. En éliminant alors les variables auxiliaires et leurs différentielles, on obtiendra dy en fonction de x et de dx. Pour trouver la dérivée Dy il suffira de diviser par dx.

Avec un peu d'exercice, ces calculs se font très rapidement. On peut même se dispenser d'introduire de nouvelles lettres et la série des substitutions se fait mentalement. Soit, par exemple, à trouver la différentielle de $e^{\sin x} \cos x$; on a successivement

$$\begin{aligned} d.e^{\sin x} \cos x &= \cos x \, d.e^{\sin x} + e^{\sin x} \, d.\cos x \\ &= \cos x \, e^{\sin x} \, d.\sin x - e^{\sin x} \sin x \, dx \\ &= e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x) \, dx. \end{aligned}$$

Remarque. — Certaines fonctions de fonctions revêtent parfois une forme sous laquelle le mode de composition n'est pas immédiatement apparent, et il faut alors les transformer avant de les différentier.

C'est le cas pour les fonctions u^v et $\text{Log}_u v$, dans lesquelles u et v désignent des fonctions de x. On commencera par les exprimer au moyen d'une base constante, par exemple e ; on aura ainsi

$$u^v = e^{v \,\text{Log}\, u}, \qquad \text{Log}_u v = \frac{\text{Log}\, v}{\text{Log}\, u},$$

et les différentielles s'obtiennent alors par les règles précédentes.

65. Extension des définitions au cas d'une variable complexe. — Soit $z = x + yi$ une variable complexe, la dérivée d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle $f(z)$ se définit comme dans le cas où la variable est réelle. C'est la limite, $f'(z)$, vers laquelle tend le rapport

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

des accroissements correspondants de la fonction et de la variable quand on donne à celle-ci un accroissement h, réel ou complexe, qui tend vers zéro d'une manière quelconque. Lorsque cette limite n'existe pas, on dit que la fonction n'a pas de dérivée pour la valeur correspondante de z.

Les différentielles se définissent aussi, comme dans le cas des variables réelles, en multipliant les dérivées par la différentielle dz de la variable indépendante. Cette dernière différentielle n'est autre chose que l'accroissement arbitraire $h = \Delta x + i \,\Delta y$ que l'on attribue à cette variable.

Les règles qui ont été établies (n° 61) pour former la dérivée d'une somme, celle d'un produit, celle d'un quotient de deux fonctions, celle d'une puissance entière de la variable indépendante, règles qui résultent immédiatement de la définition de la dérivée comme limite

d'un quotient, subsistent intégralement dans le cas où la variable est complexe. Ces règles suffisent pour former la dérivée d'un polynôme et d'une fraction rationnelle.

I. Si $f(z)$ est un polynôme entier,

$$f(z) = A(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_{n-1} z + A_n,$$

on aura

$$f'(z) = A' = nA_0 z^{n-1} + (n-1) A_1 z^{n-2} + \cdots + A_{n-1}.$$

Donc la dérivée d'un polynôme est finie et déterminée pour toutes les valeurs de z sans exception.

II. Si $f(z)$ est une fraction rationnelle, ses deux termes sont des polynômes A et B et la règle pour dériver un quotient donne

$$f'(z) = D\frac{A}{B} = \frac{BA' - AB'}{B^2}.$$

Donc une fraction rationnelle a une dérivée déterminee par toutes les valeurs de z sauf les racines du dénominateur B.

III. Lorsque $f(z)$ est un polynôme décomposé en facteurs linéaires, sa dérivée s'obtient aussi par la règle de dérivation d'un produit. Soit

$$f(z) = (z - a)^m (z - b)^n \cdots ;$$

on aura

$$f'(z) = (z - a)^m (z - b)^n \cdots \left[\frac{m}{z - a} + \frac{n}{z - b} + \cdots\right].$$

Remarque. — Comme nous le verrons, on se sert souvent de la considération des variables complexes pour obtenir plus facilement des résultats relatifs aux variables réelles. Ceux-ci, en effet, se déduisent comme cas particuliers des premiers en supposant que la variable devienne réelle.

Exercices.

Démontrer les formules suivantes :

$$d.\,\text{arc tg}\,\frac{bx}{a} = \frac{ab\,dx}{a^2 + b^2x^2} \qquad d.\,\text{Log}\,\frac{a + bx}{a - bx} = \frac{2ab\,dx}{a^2 - b^2x^2}$$

$$d.\,\text{Log}\,(x + \sqrt{a^2 + x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \qquad d.\,\text{arc sin}\,\frac{x}{a} = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$d.\,\text{Log}\sin x = \cot x\,dx \qquad d.\,\text{Log}\cos x = -\,\text{tg}\,x\,dx$$

$$d.\,\text{Log tg}\,\frac{x}{2} = \frac{dx}{\sin x} \qquad d.\,\text{Log tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{dx}{\cos x}$$

$$d.\,\text{arc tg}\left(\frac{b}{a}\,\text{tg}\,x\right) = \frac{ab\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} \qquad d.\,\text{Log}\,\frac{a + b\,\text{tg}\,x}{a - b\,\text{tg}\,x} = \frac{2ab\,dx}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}$$

$$d\left[\operatorname{tg}x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x\right] = \frac{dx}{\cos^4 x}$$

$$d\left[\frac{3x}{2} + \left(\frac{3}{2}\cos x + \cos^3 x\right)\sin x\right] = 4\cos^4 x\, dx.$$

§ 2. Propriétés de la dérivée.

66. Théorème. — *Si l'on suppose Δx infiniment petit et que $f'(x)$ ne soit pas nulle au point donné x, $\Delta f(x)$ qui est égal à $f(x+\Delta x) - f(x)$ et $df(x)$ qui est égal à $f'(x)\Delta x$ sont deux infiniment petits dont le rapport a pour limite l'unité.*

En effet, on a, par définition de la dérivée,

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

ε ayant pour limite 0 avec Δx. D'où en divisant par $f'(x)$, qui n'est pas nulle par hypothèse,

$$\frac{\Delta f(x)}{f'(x)\Delta x} = 1 + \frac{\varepsilon}{f'(x)}.$$

Le théorème résulte de cette égalité, dans laquelle $\varepsilon : f'(x)$ a pour limite 0 avec Δx.

Donc, quand Δx est infiniment petit, Δy et dy sont deux infiniment petits, susceptibles d'être substitués l'un à l'autre sous les conditions exposées plus haut (nº 18). On doit se garder toutefois de les confondre entre eux [1].

Corollaire. — *Si en un point donné x, $f'(x)$ n'est pas nulle, on peut assigner un nombre δ tel que $\Delta f(x)$ et $df(x) = f'(x)\Delta x$ aient le même signe sous la condition $|\Delta x| < \delta$.*

En effet, $\Delta f(x) : df(x)$, ayant pour limite l'unité quand Δx tend vers zéro, doit nécessairement devenir et rester positif à partir d'une valeur suffisamment petite de Δx, par exemple à partir de $|\Delta x| < \delta$. Cette condition réalisée, $\Delta f(x)$ et $df(x)$ auront le même signe pour toutes ces valeurs de Δx.

67. Fonction croissante, décroissante en un point. — Si $f'(x)$ est positif au point x, il résulte du corollaire précédent que, pourvu que Δx soit suffisamment petit, $\Delta f(x)$ sera de même signe que Δx. On dit dans ce cas que la fonction est *croissante au point x*.

[1] Dans les ouvrages d'application, on a souvent le tort de les confondre, au moins dans le langage.

Si, au contraire, $f'(x)$ est négatif, $\Delta f(x)$ et Δx seront de signes contraires pour les valeurs suffisamment petites de Δx. On dit, dans ce cas, que la fonction est *décroissante au point x.*

Il résulte de là que, si $f'(x)$ n'est pas nulle, la fonction peut toujours acquérir, dans le voisinage immédiat du point x, des valeurs supérieures et inférieures à celles qu'elle acquiert au point x. Les valeurs supérieures, par exemple, s'obtiendront à droite du point x si la fonction est croissante et à gauche si elle est décroissante. Cette simple remarque sert de base au théorème de Rolle :

68. Théorème de Rolle. — *Si la fonction continue $f(x)$ admet une dérivée dans l'intervalle (a, b) et s'annule pour $x = a$ et pour $x = b$, sa dérivée s'annulera en un point intermédiaire.*

En effet, $f(x)$ a une plus grande valeur M et une plus petite valeur m dans l'intervalle (a, b) (n° 22). Si ce maximum et ce minimum sont nuls tous deux, $f(x)$, étant égale à zéro dans tout l'intervalle, est une constante et sa dérivée sera nulle dans tout l'intervalle. Dans ce cas, le théorème est démontré. Si, au contraire, le maximum est plus grand que zéro, la fonction $f(x)$ atteindra ce maximum (n° 27), pour une valeur ξ de x comprise entre a et b. On aura $f'(\xi) = 0$; car, s'il en était autrement, la fonction $f(x)$ serait croissante ou décroissante au point ξ et acquerrait dans le voisinage immédiat de ce point des valeurs supérieures à $f(\xi)$, comme on l'a montré au n° précédent. Donc $f(\xi)$ ne serait pas le maximum que nous avons supposé.

Remarques. — On observera : 1°) que cette démonstration ne suppose pas la continuité de la fonction dérivée ; 2° qu'elle subsiste intégralement même si la dérivée cesse d'exister pour les valeurs extrêmes a et b, pourvu que $f(x)$ reste continue.

Corollaire. — Si $f(x)$ reprend la même valeur pour $x = a$ et pour $x = b$, sa dérivée s'annulera en un point intermédiaire, car la fonction $f(x) - f(a)$, qui a la même dérivée, s'annulera pour $x = a$ et pour $x = b$.

69. Formule des accroissements finis. — Soit $f(x)$ une fonction continue ayant une dérivée dans l'intervalle (a, b) ; il en sera de même pour la fonction $\varphi(x)$, définie par l'équation

$$\varphi(x) = (b - a)[f(x) - f(a)] - (x - a)[f(b) - f(a)].$$

Mais cette fonction s'annule pour $x = a$ et pour $x = b$, donc, en vertu du théorème de Rolle, sa dérivée, qui a pour expression

$$\varphi'(x) = (b - a) f'(x) - [f(b) - f(a)],$$

s'annulera pour une valeur ξ de x comprise entre a et b. La substitution de cette valeur donne donc

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi).$$

Telle est la formule des accroissements finis. On la met le plus souvent sous une autre forme. Remplaçons-y a par x et b par $(x + h)$, alors ξ (qui est compris entre x et $x + h$) peut être remplacé par $x + \theta h$, θ désignant un nombre généralement inconnu > 0 et < 1. On trouve ainsi

$$f(x + h) - f(x) = h f'(x + \theta h)$$
$$(0 < \theta < 1).$$

Cette formule suppose simplement que la dérivée soit déterminée dans l'intervalle de x à $x + h$, ces valeurs extrêmes pouvant faire exception. Le nombre θ reste inconnu, il dépend de x et de h, mais on sait qu'il est toujours compris entre 0 et 1.

La formule des accroissements finis est une des formules fondamentales du calcul différentiel. Elle est d'un usage continuel. On en déduit les théorèmes suivants :

70. Théorème. — *Toute fonction continue $f(x)$, dont la dérivée est constamment nulle dans un intervalle (a, b), se réduit à une constante dans cet intervalle.*

Soient, en effet, x et $x + h$ deux valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b), on aura, par la formule précédente,

$$f(x + h) - f(x) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad f(x + h) = f(x),$$

c'est-à-dire que la fonction est une constante.

71. Théorème. — *Deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ dont les dérivées sont constamment égales dans un intervalle (a, b) ne peuvent différer que par une constante dans cet intervalle.*

En effet, la fonction $f(x) - \varphi(x)$, ayant une dérivée constamment nulle se réduit à une constante C dans cet intervalle et l'on a

$$f(x) = \varphi(x) + C.$$

Ce théorème est le *théorème fondamental du calcul intégral*. Dans celui-ci on se propose de trouver toutes les fonctions ayant une dérivée connue. On voit que le problème sera résolu si l'on peut en

trouver une seule, car toutes les autres pourront se déduire de celle-là par l'addition d'une constante.

72. Théorème. — *Si $f(x)$ a une dérivée $f'(x)$ et tend vers l'infini quand x tend vers une valeur finie a, il est impossible que $f'(x)$ conserve une valeur finie quand x tend vers a.*

En effet, si $|f'(x)|$ avait pour limite supérieure M, la formule des accroissements finis donnerait

$$|f(x+h)-f(x)|<|Mh|$$

et comme on peut faire tendre x vers a dans cette formule et choisir h de manière que $f(x+h)$ reste fini, on voit que $f(x)$ ne croîtrait pas indéfiniment quand x tend vers a.

73. Formule de Cauchy. — *Soient $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions continues et admettant des dérivées dans l'intervalle de a à $a+h$; supposons, en outre que $F'(x)$ ne s'annule pas dans cet intervalle. Si l'on désigne par θ une quantité généralement inconnue mais comprise entre 0 et 1, on aura la relation*

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{F(a+h)-F(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{F'(a+\theta h)}.$$

Cette formule est due à Cauchy ; pour la démontrer, considérons la fonction $\varphi(x)$, définie par la formule

$$\varphi(x)=[f(x)-f(a)]-[F(x)-F(a)]\frac{f(a+h)-f(a)}{F(a+h)-F(a)};$$

elle s'annule pour $x=a$ et pour $x=a+h$; donc, en vertu du théorème de Rolle, sa dérivée $\varphi'(x)$ s'annule en un point intermédiaire $(a+\theta h)$. On obtient ainsi

$$f'(a+\theta h)-F'(a+\theta h)\frac{f(a+h)-f(a)}{F(a+h)-F(a)}=0.$$

On peut diviser les deux membres par $F'(a+\theta h)$ qui n'est pas nulle par hypothèse et l'on trouve la formule de Cauchy.

Remarque. — La formule des accroissements finis n'est qu'un cas particulier de celle-ci : elle s'en déduit en posant $F(x)=x$, ce qui est permis puisque $F'(x)=1$ et ne peut s'annuler.

EXERCICES.

1. *Si $f'(x)$ est déterminée et si x' et x'' tendent vers x en satisfaisant aux conditions $x'<x<x''$, on aura*

$$\lim \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = f'(x).$$

On remarque que le premier membre a une valeur intermédiaire entre les quantités

$$\frac{f(x'') - f(x)}{x'' - x} \quad \text{et} \quad \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}.$$

qui tendent toutes les deux vers $f'(x)$.

2. *Si x' et x'' sont tous deux $> x$ ou tous deux $< x$, la formule précédente subsistera, pourvu que $f'(x)$ soit continue au point x.*

On considère la relation

$$f(x'') - f(x') = (x'' - x') f'[x' + \theta(x'' - x')].$$

3. *Si la dérivée $f'(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), à tout nombre positif ε, si petit qu'il soit, correspond un nombre δ tel qu'on ait*

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon \qquad \text{si } |h| < \delta,$$

pourvu que x et $x + h$ appartiennent à l'intervalle (a, b).

Par la formule des accroissements finis, le premier membre devient

$$| f'(x + \theta h) - f'(x) |.$$

La dérivée étant continue, on peut supposer son oscillation $< \varepsilon$ dans tout intervalle $< \delta$ (n° 27, IV), alors cette différence sera *a fortiori* $< \varepsilon$.

On exprime ce théorème en disant que $\Delta f(x) : \Delta x$ converge *uniformément* vers sa limite $d\,f(x) : dx$ dans l'intervalle (a, b).

4. *Réciproquement, si $\Delta f(x) : \Delta x$ converge uniformément vers sa limite $f'(x)$, celle-ci sera continue dans l'intervalle (a, b).*

5. *Si $f(x)$ a une dérivée déterminée dans l'intervalle (a, b), $f'(x)$ est une fonction qui ne peut passer d'une valeur à une autre dans cet intervalle sans passer aussi par toutes les valeurs intermédiaires.*

On montre d'abord que si $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signes contraires $f'(x)$ peut prendre la valeur intermédiaire 0. A cet effet, on prouve que $f(x)$ a un maximum ou un minimum qu'elle atteint pour une valeur ξ de x comprise entre a et b et que l'on a $f'(\xi) = 0$. Les autres cas se ramènent au précédent.

6. *Définitions.* — Lorsque le rapport $\Delta y : \Delta x$ tend vers une limite déterminée quand Δx tend vers zéro par des valeurs positives, cette limite est la *dérivée à droite* de y. La *dérivée à gauche* se définit de même, Δx restant négatif.

Théorème I. — Si la fonction continue $f(x)$ a une dérivée à droite

déterminée et positive en tout point de l'intervalle $(a, b,)$ *le maximum de* $f(x)$ *dans cet intervalle sera* $f(b)$.

Le maximum ne peut avoir lieu en un point $\xi < b$, car $f(\xi + h) - f(\xi)$ sera positif avec la dérivée prise à droite $f'(\xi)$ pour h positif et suffisamment petit.

Théorème II. — Si, au lieu de cela, la dérivée à droite était négative, $f(b)$ *serait le minimum de* $f(x)$ *dans l'intervalle* (a, b).

Théorème III. — Si la fonction continue $f(x)$ *a une dérivée à droite constamment nulle dans l'intervalle* (a, b), $f(x)$ *est constant.*

Soit ε un nombre positif, les deux fonctions

$$f(x) + \varepsilon(x - a) \qquad\qquad f(x) - \varepsilon(x - a)$$

ont respectivement des dérivées à droite positive, ε, et négative, $-\varepsilon$; elles ont donc respectivement pour maximum et pour minimum :

$$f(b) + \varepsilon(b - a), \qquad\qquad f(b) - \varepsilon(b - a),$$

d'où l'on conclut, respectivement,

$$f(x) < f(b) + \varepsilon(b - x), \qquad\qquad f(x) > f(b) - \varepsilon(b - x),$$

ce qui ne peut avoir lieu pour ε infiniment petit que si $f(x) = f(b)$.

7. Théorèmes analogues sur la dérivée à gauche.

§ 3. Dérivées et différentielles successives.

74. Définitions. — Soit $y = f(x)$ une fonction ayant une dérivée $y' = f'(x)$. Si cette nouvelle fonction admet elle-même une dérivée, on la représentera par y'', $f''(x)$ ou D^2y, et on l'appellera la *dérivée seconde* de y.

La dérivée de y'' sera la *dérivée troisième* de y et se représentera par y''', $f'''(x)$ ou D^3y et ainsi de suite.

On appelle *différentielle seconde* de y et l'on représente par d^2y la différentielle de sa différentielle dy.

Cette nouvelle différentielle dépend de la relation que l'on veut établir entre la variable x et son accroissement $dx = \Delta x$. Si l'on convient que cet accroissement doit avoir une valeur constante, indépendante de x, on aura

$$d^2y = d.f'(x)\,dx = f''(x)dx^2$$

De même d^2y aura une différentielle qui sera la *différentielle troisième* de y. On la représente par

$$d^3y = f'''(x)\,dx^3 = y'''dx^3.$$

On continue ainsi de suite et l'on a, en général,

$$d^n y = f^{n}(x)\,dx^n = y^{n}\,dx^n.$$

On tire de là

$$y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots,\ y^n = \frac{d^ny}{dx^n}, \ldots$$

Donc *la dérivée $n^{ième}$ d'une fonction est le quotient de la différentielle $n^{ième}$ de la fonction par la puissance $n^{ième}$ de la différentielle de la variable prise comme constante*, ce qui fournit une nouvelle manière de représenter cette dérivée et celle qui est la plus généralement employée.

75. Des différences finies. — Si l'on donne à x un accroissement Δx, la fonction $f(x)$ prendra un accroissement

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

que nous appellerons *différence première* de $f(x)$.

La différence de la différence première sera la *différence seconde*, qui se représentera par $\Delta^2 f(x)$, et ainsi de suite. On convient de considérer l'accroissement Δx comme indépendant de x, de sorte que l'on a

$$\Delta^2 f(x) = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)$$
$$\Delta^3 f(x) = f(x + 3\Delta x) - 3f(x + 2\Delta x) + 3f(x + \Delta x) - f(x)$$

et ainsi de suite.

Il existe *une relation importante* entre ces différences successives et les dérivées successives de $f(x)$, supposées déterminées. Nous connaissons déjà, pour le premier ordre, la formule des accroissements finis :

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x) \\ (0 < \theta < 1) \end{cases}$$

Afin d'obtenir une formule analogue pour le second ordre, remplaçons, dans cette formule, $f(x)$ par $f(x + \Delta x) - f(x)$; il viendra

$$\Delta^2 f(x) = \Delta x\,[f'(x + \theta x + \Delta x) - f'(x + \theta \Delta x)]$$

Mais la quantité entre crochets s'obtient en remplaçant $f(x)$ par $f'(x + \theta \Delta x)$ dans la formule (1), ce qui donne

$$f'(x + \theta\Delta x + \Delta x) - f'(x + \theta\Delta x) = \Delta x f''(x + \theta\Delta x + \theta_1 \Delta x).$$
$$(0 < \theta_1 < 1)$$

et, en substituant cette valeur dans l'équation précédente, on trouve

$$(2)\qquad \Delta^2 f(x) = \Delta x^2 f''(x + \theta\Delta x + \theta_1 \Delta x).$$

C'est la formule relative au second ordre.

Pour passer au troisième, remplaçons, dans la formule (2), $f(x)$ par $f(x+\Delta x) - f(x)$; on trouvera, de même,

$$(3) \qquad \Delta^3 f(x) = \Delta x^3 f'''(x + \theta\Delta x + \theta_1 \Delta x + \theta_2 \Delta x),$$

où θ_2 est une troisième quantité comprise entre zéro et un.

On peut recommencer la même opération sur l'équation (3) et continuer ainsi de suite.

Supposons que les dérivées de $f(x)$ soient des fonctions continues ; divisons respectivement les équations (1), (2), (3) par Δx, Δx^2, Δx^3 ; il viendra, en faisant tendre Δx vers zéro,

$$\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x), \qquad \lim \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = f''(x), \qquad \lim \frac{\Delta^3 f(x)}{\Delta x^3} = f'''(x)$$

et, en général,

$$\lim \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = f^n(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Donc la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction est la limite du rapport de la différence $n^{\text{ième}}$ de la fonction par la puissance $n^{\text{ième}}$ de la différence de la variable, quand cette différence, supposée indépendante de x, tend vers zéro.

76. Dérivées $n^{\text{ièmes}}$ des fonctions élémentaires. — La détermination de la dérivée d'un ordre quelconque pour une fonction élémentaire ou composée, ne peut présenter d'autre difficulté que la longueur des calculs, si l'ordre de la dérivée est donné numériquement. Mais, si l'on demande d'exprimer la dérivée $n^{\text{ième}}$ en fonction de n, n restant arbitraire, le problème devient plus difficile. Toutefois, pour quelques unes des fonctions élémentaires, la solution en est assez simple.

I. On a trouvé $Dx^a = ax^{a-1}$; on en tire successivement

$$D^2 x^a = a(a-1)x^{a-2}$$

. . . .

$$D^n x^a = a(a-1)\dots(a-n+1)x^{a-n}$$

Si a est entier et > 0, cette dérivée se réduira à la constante a pour $n = a$, et sera nulle pour $n > a$. Donc *la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un polynôme de degré inférieur à n est identiquement nulle.*

II. De l'équation $D\,\mathrm{Log}\,x = x^{-1}$, on tire immédiatement, par la règle ci-dessus,

$$D^n \,\mathrm{Log}\,x = D^{n-1} x^{-1} = (-1)(-2)\dots(-n+1)x^{-n}$$

$$D^n \,\mathrm{Log}\,x = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

III. La formule $DA^x = A^x \operatorname{Log} A$ donne immédiatement

$$D^n A^x = A^x (\operatorname{Log} A)^n$$
$$D^n e^x = e^x$$

IV. On a trouvé que

$$D \sin x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

La dérivée s'obtient en ajoutant $\frac{\pi}{2}$ à l'argument, donc, en général,

$$D^n \sin x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

On a également

$$D \cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

par conséquent,

$$D^n \cos x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

VI. On a trouvé

$$D \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}; \qquad \text{donc} \qquad D^n \operatorname{arc\,tg} x = D^{n-1}\frac{1}{1+x^2}.$$

On simplifie le calcul, en rendant la variable complexe. On peut alors faire la décomposition suivante :

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

d'où l'on conclut

$$D^{n-1}\frac{1}{1+x^2} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right]$$

On se débarrasse facilement des imaginaires. Posons

$$x - i = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

d'où (en observant que $\sin\varphi$ est > 0)

$$\rho = \sqrt{1+x^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,cot} x \qquad (0 < \varphi < \pi),$$

il viendra, par la formule de Moivre,

$$\frac{1}{(x-i)^n} = \frac{\cos n\varphi + i\sin n\varphi}{\rho^n},$$
$$\frac{1}{(x+i)^n} = \frac{\cos n\varphi - i\sin n\varphi}{\rho^n}.$$

Par conséquent,

$$D^{n-1}\frac{1}{1+x^2} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\rho^n}\sin n\varphi,$$

$$D^n \operatorname{arc\,tg} x = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin(n \operatorname{arc\,cot} x),$$
$$(0 < \operatorname{arc\,cot} x < \pi).$$

77. Dérivée $n^{ième}$ d'un produit. Formule de Leibnitz. — Soit uv le produit de deux fonctions de x ; on a trouvé

$$D.uv = v\,Du + u\,Dv.$$

Dérivons ; il vient, par la règle précédente,

$$D^2 uv = v\,D^2 u + 2\,Du.Dv + u\,D^2 v.$$

Dans la dérivée première, la somme des indices de dérivation est égale à 1 dans chaque terme ; dans la dérivée seconde, elle est égale à 2 ; on voit de suite qu'elle sera égale à n dans la dérivée $n^{ième}$. On peut donc poser la formule

$$(1) \qquad D^n uv = A_0\, u\, D^n v + A_1\, Du\, D^{n-1} v + A_2\, D^2 u\, D^{n-2} v + \dots$$

dans laquelle les lettres A désignent des constantes numériques qu'il s'agit seulement de déterminer. Faisons, pour cela,

$$u = e^{\alpha x}, \qquad v = e^x \qquad \text{d'où} \qquad uv = e^{(1+\alpha)x}$$

on aura

$$D^n uv = (1+\alpha)^n e^{(1+\alpha)x}$$

$$D^k u\, D^{n-k} v = \alpha^k e^{\alpha x}.e^x = \alpha^k e^{(1+\alpha)x}$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (1) ; elle deviendra, après suppression du facteur commun $e^{(1+\alpha x)}$,

$$(1+\alpha)^n = A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \dots$$

Donc les coefficients A_0, A_1, A_2,... ne sont autres que ceux du binôme. On peut ainsi donner à l'équation (1) la forme symbolique suivante :

$$D^n uv = (Du + Dv)^n.$$

Mais on convient d'observer les conditions suivantes dans le développement du second membre : 1° on écrira Du et Dv dans tous les termes, même dans les termes extrêmes où l'un d'eux reçoit l'exposant 0 ; 2° on remplacera ensuite Du^p par $D^p u$, Dv^q par $D^q v$ et enfin, $D^0 u$ par u et $D^0 v$ par v.

78. Propriétés des dérivées d'une fonction rationnelle. — Soient z une variable complexe et $f(z)$ une fonction rationnelle de z

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

les polynômes P et Q n'ayant pas de racines communes. Soit a une racine de degré m de $P(z)$, nous disons aussi que c'est une racine de degré m de $f(z)$. On a, dans ce cas,

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$$

et $\varphi(z)$ est une fonction rationnelle qui a une valeur finie et ne s'annule plus pour $z = a$. Dérivons ; il vient

$$f'(z) = (z - a)^{m-1} [m\varphi(z) + (z - a)\varphi'(z)],$$

La quantité entre crochets est une fraction rationnelle qui ne s'annule plus pour $z = a$; on a donc le théorème suivant :

I. *Toute racine de degré m d'une fonction rationnelle $f(z)$ est une racine de degré $(m - 1)$ de la dérivée ; en particulier, une racine simple de $f(z)$ ne sera plus racine de la dérivée.*

Si l'on applique ce théorème, de proche en proche, aux dérivées successives de $f(z)$ on en déduit le suivant :

II. *Toute racine de degré m de $f(z)$ est commune à $f(z)$ et à ses $m - 1$ premières dérivées. Réciproquement, toute racine commune à $f(z)$ et à ses $(m-1)$ premières dérivées et qui n'annule pas la dérivée d'ordre m est une racine de degré m de $f(z)$.*

Ces théorèmes jouent un rôle important en algèbre, dans le cas particulier où $f(z)$ se réduit à un polynôme.

Exercices.

1. Dérivées $n^{\text{ièmes}}$ des fonctions :

$$\frac{1}{a^2 - b^2x^2}\,;\quad \frac{1}{a^2 + b^2x^2}\,;\quad \frac{x}{a^2 - b^2x^2}\,;\quad \frac{x}{a^2 + b^2x^2}.$$

R. On opère comme pour trouver la dérivée d'ordre n de $1 : (1 + x^2)$ au n° 76 ; ces fractions se décomposent en d'autres plus simples, dont les dénominateurs sont linéaires, et qui se dérivent sans difficulté.

2. $\quad D^n \sin^m x, \qquad D^n \cos^m x \qquad$ (m entier et positif).

R. On décompose ces fonctions en sommes de sinus et de cosinus des multiples de x. La dérivation est alors facile.

3. $\quad D^n e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta) = e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta + n\theta).$

R. On prouve que la relation, vraie pour n, subsiste pour $n + 1$, (θ est supposé constant).

4. $\quad D^n e^{ax}\cos bx = \rho^n e^{ax}\cos(bx + n\theta).$

R. Se ramène au cas précédent en posant $a = \rho\cos\theta$, $b = \rho\sin\theta$.

5. $\quad D^n \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,; \qquad D^n \arcsin x.$

R. La première s'obtient par la règle qui donne $D^n uv$, en posant

$u = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$, $v = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$. La seconde se ramène à la première, après la première dérivation.

6. $\quad \mathrm{D}^n x^m \operatorname{Log} x\,; \qquad \mathrm{D}^{n+1} x^n \operatorname{Log} x = \dfrac{n!}{x}.$

R. Applications de la règle pour dériver uv.

7. $\quad \mathrm{D}^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = (-1)^{n-1}\dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n}\sin(n \arc \cos x).$

R. Supposée vraie pour n, la relation se démontre facilement pour $n+1$.

8. $\quad \mathrm{D}^n uvw\ldots = (\mathrm{D}u + \mathrm{D}v + \mathrm{D}w + \ldots)^n.$

R. Démonstration analogue à celle du n° 77.

9. $\quad \mathrm{D}^n f(a+bx) = b^n f^n(a+bx).$

10. *Dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction de fonction.* — On prouve de proche en proche que, pour $u = \varphi(x)$, on a

$$\mathrm{D}^n f(u) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}_k f^{(k)}(u),$$

en désignant par P_k un polynôme, indépendant de la forme de f, homogène et de degré k par rapport aux dérivées $\mathrm{D}u$, D^2u,... (Pour la manière de former ce polynôme, voir n° 92).

11. Soit $u = \operatorname{Log} x$; si la lettre D désigne des dérivées par rapport à u et si l'on convient d'effectuer les multiplications algébriquement, on aura la formule symbolique

$$\mathrm{D}_x^n f(\operatorname{Log} x) = \frac{\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\ldots(\mathrm{D}-n+1)f(u)}{x^n}.$$

R. On a d'abord, par l'exercice précédent,

$$(1) \qquad \mathrm{D}^n f(\operatorname{Log} x) = \Sigma \mathrm{P}_k f^{(k)}(u).$$

Faisant, en particulier, $f(u) = e^{au}$, ce qui ne change pas P_k,

$$(2) \qquad \mathrm{D}^n e^{a \operatorname{Log} x} = \Sigma \mathrm{P}_k a^k e^{au}.$$

Mais on a, d'autre part,

$$(3) \qquad \mathrm{D}^n e^{a \operatorname{Log} x} = \mathrm{D}^n x^a = a(a-1)\ldots(a-n+1)x^{a-n}$$
$$= a(a-1)\ldots(a-n+1)\frac{e^{au}}{x^n}.$$

Le second membre de (1) se déduit de celui de (2), en supprimant le facteur e^{au} et en remplaçant a^k par $\mathrm{D}^k f(u)$. Si, au lieu de faire ce changement dans (2), on le fait dans (3), on obtient la formule à démontrer.

12. Démontrer la formule symbolique :

$$\mathrm{D}^n \varphi(x)e^{ax} = e^{ax}(\mathrm{D}+a)^n \varphi(x).$$

R. Application de la formule de Leibnitz.

13. *Dérivée $n^{ième}$ d'une fonction rationnelle.* — On décompose la fraction rationnelle en une somme de fractions simples par la méthode qui sera exposée plus loin (n° 104). Elle est alors préparée pour la dérivation, qui se fait sans difficulté. Les dérivées de l'exercice 1 sont des cas particuliers de cette méthode.

Remarque. — Les procédés les plus généraux pour la formation des dérivées $n^{ièmes}$ se rattachent à la formule de Taylor et aux fonctions d'une variable complexe. (Voir, en particulier, les applications de cette formule dans le chapitre suivant).

CHAPITRE II.

Formule de Taylor. Applications diverses.

§ 1. Théorèmes préliminaires.

79. Théorème I. — *Soient $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions ayant des dérivées déterminées du premier ordre dans l'intervalle de a à $a+h$; si ces deux fonctions s'annulent pour $x=a$ et si $F'(x)$ ne s'annule pour aucune des valeurs de x intermédiaires entre a et $a+h$, on aura*

$$(1) \qquad \frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f'(a+\theta h)}{F'(a+\theta h)} \qquad (0<\theta<1).$$

En effet, la formule de Cauchy (n° 73) se réduit à la précédente, quand on y fait

$$f(a) = F(a) = 0.$$

Il est important de remarquer que, dans la formule (1), h peut être aussi bien négatif que positif.

80. Théorème II. — *Soient $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions ayant des dérivées déterminées jusqu'à l'ordre n inclusivement dans l'intervalle de a à $a+h$; si ces deux fonctions et toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ s'annulent pour $x=a$, et si aucune des n premières dérivées de $F(x)$ ne s'annule pour une valeur de x intermédiaire entre a et $a+h$, on aura la relation*

$$(2) \qquad \frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{F^{(n)}(a+\theta h)} \qquad (0<\theta<1).$$

Ce théorème résulte de l'application répétée du théorème précédent. On a d'abord

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f'(a+\theta_1 h)}{F'(a+\theta_1 h)} \qquad (0<\theta_1<1).$$

Mais on peut appliquer la même formule, en y remplaçant les fonctions par leurs dérivées et h par $\theta_1 h$, ce qui donne

$$\frac{f'(a+\theta_1 h)}{F'(a+\theta_1 h)} = \frac{f''(a+\theta_2 h)}{F''(a+\theta_2 h)} \qquad (0<\theta_2<\theta_1).$$

On continue ainsi de proche en proche jusqu'à ce qu'on obtienne

$$\frac{f^{n-1}(a+\theta_{n-1}h)}{F^{n-1}(a+\theta_{n-1}h)} = \frac{f^{n}(a+\theta_n h)}{F^{n}(a+\theta_n h)} \qquad (0 < \theta_n < \theta_{n-1}).$$

Donc, ce dernier quotient est aussi égal au premier, et en remplaçant θ_n par θ, ce qui est permis, on obtient la formule à démontrer.

81. Théorème III. — *Soit $f(x)$ une fonction ayant des dérivées déterminées jusqu'à l'ordre n inclusivement dans l'intervalle de a à $a+h$; si cette fonction et ses $(n-1)$ premières dérivées s'annulent pour $x=a$, on aura*

$$(3) \qquad f(a+h) = \frac{h^n}{n!} f^n(a+\theta h) \qquad (0 < \theta < 1).$$

Cette formule est un cas particulier de la précédente. Elle s'en déduit quand on y fait

$$F(x) = (x-a)^n.$$

Cette fonction vérifie les conditions du théorème II ; on a

$$F(a+h) = h^n, \qquad F^n(x) = n\,!$$

et si l'on substitue ces valeurs dans la formule (2), on obtient la formule (3).

§ 2. Formules de Taylor et de Maclaurin.

82. Objet de la formule de Taylor. — Cette formule a pour objet de développer $f(a+h)$ en une somme de termes ordonnés suivant les puissances de h et de la forme

$$f(a+h) = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \cdots + A_{n-1} h^{n-1} + M h^n,$$

les quantités $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ étant des constantes par rapport à h, et M une fonction de h, mais *qui doit conserver une valeur finie quand h tend vers zéro.*

Ce développement est possible sous des conditions très générales que nous allons indiquer dans le théorème suivant et nous prouverons ensuite qu'il n'est possible que d'une seule manière.

83. Théorème I. Formule de Taylor. — *Si $f(x)$ est une fonction continue ayant des dérivées déterminées jusqu'à l'ordre n inclusivement dans l'intervalle $(a, a+h)$, $f(a+h)$ pourra se développer suivant les puissances de h par la formule suivante :*

$$(1) \quad \begin{cases} f(a+h) = f(a) + \dfrac{h}{1} f'(a) + \dfrac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots \\ \qquad + \dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \dfrac{h^n}{n!} f^n(a+\theta h), \end{cases}$$

où θ est une quantité généralement inconnue, mais comprise entre 0 et 1.

Ce développement porte le nom de *formule de Taylor*. Il vérifie évidemment les conditions dont nous avons parlé dans le numéro précédent, lorsque la dérivée $n^{ième}$ est, en outre, bornée dans l'intervalle $(a, a+h)$. On aperçoit dans cette formule la loi de formation des coefficients A et on y trouve, en même temps, une expression remarquable de la fonction M. Pour établir cette formule, on observe que la fonction $f(x)$ et le polynôme de degré $(n-1)$ en x

$$P_{n-1}(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

jouissent des propriétés suivantes : 1° Ils sont égaux pour $x = a$; 2° leurs dérivées du même ordre sont aussi égales deux à deux pour $x = a$ jusqu'à l'ordre $(n-1)$ inclusivement ; donc 3° leur différence $f(x) - P_{n-1}(x)$ s'annule pour $x = a$ ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$. Par conséquent, on peut appliquer à cette différence le théorème III du paragraphe précédent ; mais, comme le polynôme P_{n-1} a sa dérivée $n^{ième}$ identiquement nulle, la formule (**3**) de ce théorème se réduit à

$$f(a+h) - P_{n-1}(a+h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h).$$

Il reste à faire passer $P_{n-1}(a+h)$ au second membre et à remplacer ce polynôme par son développement ordonné suivant les puissances de h; on obtiendra la formule (**1**).

84. Théorème II. Unité du développement. — *Soit $f(x)$ une fonction ayant des dérivées déterminées jusqu'à l'ordre n dans l'intervalle de a à $a+h$; si $f(a+h)$ peut se développer sous la forme*

$$f(a+h) = A_0 + A_1 h + \cdots + A_{n-1} h^{n-1} + M h^n,$$

les coefficients A étant indépendants de h et M restant fini quand h tend vers zéro, ce développement coïncide terme pour terme avec celui de Taylor.

Supposons, en effet, qu'il y ait deux développements différents jouissant des propriétés indiquées, savoir

$$A_0 + A_1 h + \cdots + A_{n-1} h^{n-1} + M h^n = a_0 + a_1 h + \cdots + a_{n-1} h^{n-1} + m h^n$$

On en tire $A_0 = a_0$ pour $h = 0$. Supprimant ces termes égaux, on peut diviser par h et l'on trouve encore $A_1 = a_1$ pour $h = 0$. On continue ainsi jusqu'à ce qu'on trouve $A_{n-1} = a_{n-1}$; et alors l'équation précédente se réduit à $M = m$. Donc les deux développements sont identiques terme pour terme.

85. Terme complémentaire. Série illimitée de Taylor. — Le dernier terme de la formule de Taylor qui a une forme différente des précédents et qui a pour expression

$$\frac{h^n}{n!} f^n(a + \theta h)$$

porte le nom de *terme complémentaire* ou de *reste*. Lorsque $f(x)$ a toutes ses dérivées déterminées, on peut se donner n à volonté et, par conséquent, reculer ce terme aussi loin qu'on veut. Lorsque ce terme peut être rendu suffisamment petit à condition de prendre n assez grand, la formule de Taylor donne un procédé commode pour évaluer approximativement les fonctions. Nous allons en voir des exemples un peu plus loin comme applications de la formule de Maclaurin.

Lorsque le terme complémentaire tend vers zéro quand n tend vers l'infini, on peut prolonger la formule indéfiniment; le dernier terme disparaissant à la limite, on obtient alors l'expression de $f(a+h)$ en série convergente. La question du développement des fonctions en série illimitée de Taylor est d'une extrême importance, mais nous ne possédons pas encore les ressources analytiques nécessaires pour la traiter commodément. Nous y reviendrons plus tard, quand nous aurons exposé la théorie des séries.

86. Autres formes du dernier terme. — On peut donner au dernier terme une forme plus générale que celle du théorème I (n° 83) et qui est utile dans certains cas. Supposons toujours $f(x)$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre n dans l'intervalle de a à $a + h$ et soit, pour abréger, $a + h = b$. Posons

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{b - x}{1} f'(x) + \dots + \frac{(b - x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x).$$

Cette fonction vérifiera les mêmes conditions que $f(x)$ et l'on aura

$$\varphi(b) = f(b) = f(a + h)$$

$$\varphi(a) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a)$$

$$\varphi'(x) = \frac{(b - x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x).$$

Soit maintenant p un nombre positif quelconque ; considérons la fonction

$$\varphi(b) - \varphi(x) - \left(\frac{b - x}{b - a}\right)^p [\varphi(b) - \varphi(a)].$$

Elle s'annule pour $x = a$ et pour $x = b$. Donc sa dérivée s'annule pour une valeur intermédiaire $\xi = a + \theta h$ $(0 < \theta < 1)$, ce qui donne

$$-\varphi'(\xi) + \frac{p}{b-\xi}\left(\frac{b-\xi}{b-a}\right)^p [\varphi(b) - \varphi(a)] = 0.$$

On en tire

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \frac{b-\xi}{p}\left(\frac{b-a}{b-\xi}\right)^p \varphi'(\xi) = \frac{h^p(b-\xi)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n)}(\xi).$$

Remplaçons $\varphi(b)$ par $f(a+h)$ et ξ par $a + \theta h$, il vient

$$f(a+h) = \varphi(a) + \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n)}(a+\theta h).$$

Comme on le voit plus haut, le premier terme du second membre, $\varphi(a)$, est la somme des n premiers termes de la formule de Taylor; donc le second terme

$$\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n)}(a+\theta h)$$

est une nouvelle expression du dernier terme. Elle est plus générale que celle obtenue précédemment et elle la renferme comme particulier en faisant $p = n$.

Cette nouvelle expression est due à *Schlömilch*. Si l'on y fait $p = 1$, elle prend la forme particulière, due à *Cauchy*,

$$\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta h),$$

qui est utile dans certaines recherches.

87. Expressions diverses de la formule de Taylor. — 1° On peut remplacer dans la formule (**1**) la variable h par $x - a$; l'équation devient ainsi

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = f(a) &+ \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ &+ \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}[a + \theta(x-a)]. \end{aligned}\right.$$

Cette formule suppose que, dans l'intervalle de a à x, la fonction ait toutes ses dérivées déterminées jusqu'à l'ordre n.

2° On peut aussi remplacer a par x dans la formule (**1**), puis faire passer $f(x)$ dans le premier membre. On trouve

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1} f'(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h).$$

Supposons qu'on prenne $dx = h$; les termes successifs du second membre ne différeront que par les factorielles des différentielles

successives de $f(x)$. Quant au premier membre, c'est l'accroissement $\Delta f(x)$ qui correspond à l'accroissement arbitraire dx de la variable x. La formule précédente peut donc s'écrire comme il suit :

$$(3)\quad \Delta f(x) = \frac{df(x)}{1} + \frac{d^2 f(x)}{2!} + \cdots + \frac{d^{n-1} f(x)}{(n-1)!} + \left[\frac{d^n f(x)}{n!}\right]_{x+\theta dx}.$$

Seulement, dans la dérivée $n^{ième}$ qui figure au dernier terme, on doit remplacer, ainsi que la notation l'indique, la variable x par $x + \theta dx$. La formule (3) donne l'expression la plus condensée de la formule de Taylor, et comme on le verra (n° 132), la plus générale.

88. Formule de Maclaurin. — C'est un cas particulier de celle de Taylor. On pose $a = 0$ dans la formule (2) ; il vient

$$(4)\quad \begin{cases} f(x) = f(0) + \dfrac{x}{1} f'(0) + \dfrac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots \\ \qquad + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \dfrac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) \end{cases}$$

Cette formule suppose les dérivées déterminées jusqu'à l'ordre n dans l'intervalle de 0 à x. Le nombre θ est toujours compris entre 0 et 1.

Lorsque les dérivées de $f(x)$ sont déterminées jusqu'à un ordre quelconque, il arrive souvent que le dernier terme, qui est seul inconnu, peut être rendu aussi petit qu'on veut en donnant à n une valeur assez grande. Dans ce cas, la formule de Maclaurin fournit un procédé d'évaluation commode de la fonction $f(x)$. Nous allons en montrer des exemples :

89. Application de la formule de Maclaurin à quelques fonctions simples. — I. *Exponentielle* e^x. Faisons $f(x) = e^x$ dans la formule de Maclaurin, les dérivées reproduisant la fonction, on a

$$f(0) = f'(0) = \cdots f^{(n-1)}(0) = 1, \qquad f^{(n)}(x) = e^x$$

et la formule (4) donne

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1)$$

Pour $x = 1$, on en déduit la formule propre au calcul du nombre e,

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^\theta}{n!}$$

Le dernier terme est seul inconnu, mais il est $< \dfrac{3}{n!}$, puisque e est < 3 ; on peut donc rendre ce terme aussi petit que l'on veut, à con-

dition de prendre n assez grand. Donc la formule permet de calculer le nombre e au degré d'approximation que l'on désire.

Remarque. — On tire de la formule précédente, en multipliant ses deux membres par $(n-1)!$,

$$(n-1)!\,e = \text{nombre entier} + \frac{e^{\theta}}{n}.$$

Cette relation prouve que le nombre e est *irrationnel*. En effet, si e était rationnel, il serait le quotient $p : q$ de deux entiers et le premier membre de la relation serait entier pour $n > q$, tandis que le second est fractionnaire si n est > 3 (donc *a fortiori* $> e^{\theta}$).

II. *Exponentielle* A^x. On trouve, en changeant x en $x\operatorname{Log}A$ dans la formule précédente,

$$A^x = e^{x\operatorname{Log}A} = 1 + \frac{x\operatorname{Log}A}{1} + \dots + \frac{(x\operatorname{Log}A)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(x\operatorname{Log}A)^n}{n!}A^{\theta x}$$

III. *Fonction* $\sin x$. Si l'on fait $f(x) = \sin x$, on a (n° 76)

$$f^n(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Pour $x = 0$, les valeurs de $f(x)$ et de ses dérivées successives forment la suite périodique à quatre termes : 0, 1, 0, — 1 ; 0, 1, 0, — 1 ;... Donc, si l'on suppose $n = 2k + 1$ dans la formule de Maclaurin et qu'on y substitue

$$f^{2k+1}(\theta x) = \sin\left[\theta x + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^k\cos\theta x,$$

on trouvera

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x$$

IV. *Fonction* $\cos x$. Si l'on fait $f(x) = \cos x$; on a (n° 76)

$$f^n(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Pour $x = 0$, les valeurs de $f(x)$ et de ses dérivées successives forment la suite périodique à quatre termes : 1, 0, — 1, 0, etc. Prenons donc $n = 2k$ dans la formule de Maclaurin, et faisons la substitution

$$f^{2k}(\theta x) = \cos\left(\theta x + 2k\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k\cos\theta x,$$

il viendra

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\cos\theta x$$

V. *Fonction* Log $(1+x)$. Prenant $f(x) = \text{Log}\,(1+x)$, on a (n° 76)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f^{n)}(x) = (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Donc

$$\text{Log}\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^n$$

Cette formule suppose toutefois $x > -1$, sinon les dérivées cesseraient d'être déterminées dans l'intervalle $(x, 0)$ et la formule ne serait plus applicable. Si x est positif et compris entre 0 et 1, le dernier terme est $< \frac{1}{n}$ et peut être rendu aussi petit qu'on veut en prenant n assez grand. Donc, dans ce cas, le développement peut servir à calculer la fonction.

VI. *Fonction* $(1+x)^m$. *Formule du binôme.* On a, dans ce cas,

$$f^{n)}(x) = m\,(m-1)\ldots(m-n+1)\,(1+x)^{m-n};$$

il vient donc

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{1.2\cdots(n-1)}x^{n-1}$$
$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1.2\cdots n}x^n(1+\theta x)^{m-n}$$

Si m est entier et positif et si l'on suppose $n = m+1$, le dernier terme disparaît, car le facteur $(m-n+1)$ s'annule. On retrouve ainsi la formule du binôme de Newton. Si m est fractionnaire ou négatif, le développement peut être poursuivi aussi loin qu'on veut, pourvu que x soit > -1. Cette condition est nécessaire pour que la dérivée $f^{n)}(x)$ soit déterminée dans l'intervalle $(0,x)$ quand n est $> m$, de sorte que, si elle n'était pas remplie, la formule ne serait plus légitime.

90. Extension de la formule de Taylor aux fonctions rationnelles d'une variable complexe. — Considérons une fonction rationnelle

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

P et Q désignant deux polynômes sans racines communes. La différence

$$f(z) - \left[f(a) + \frac{z-a}{1}f'(a) + \cdots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1)}(a)\right.$$

est une fonction rationnelle de z ; elle s'annule ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées pour $z=a$; donc elle admet $z=a$ comme racine de degré n et elle peut se mettre sous la forme

$$(z-a)^n \mathrm{M},$$

M désignant une fraction rationnelle qui conserve une valeur finie quand z tend vers a (n° 78). Il vient ainsi

$$(5)\quad f(z)=f(a)+\frac{z-a}{1}f'(a)+\cdots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+(z-a)^n\mathrm{M}$$

et la *formule de Taylor* se trouve étendue sous cette forme au cas où la variable est complexe.

Remarques. — 1°) Dans la formule (5), le dénominateur de la fraction M est le même que celui de $f(z)$, car, si l'on multiplie toute l'équation par Q(z), le dénominateur disparaît dans le premier membre, et par conséquent, il doit disparaître aussi dans le second.

2°) Si $f(z)$ ou, plus généralement, si $f(z):(z-a)^n$ est une fraction proprement dite, M est aussi une fraction proprement dite. En effet, divisons tous les termes de la formule (5) par $(z-a)^n$; M sera égal à une somme de termes qui ont tous pour limite zéro et aura lui-même pour limite zéro pour $z=\infty$, ce qui ne peut avoir lieu que si M est une fraction proprement dite.

3°) Le développement de $f(z)$ suivant les puissances de $(z-a)$ ne peut se faire que par la formule (5), car la démonstration faite au n° 84 s'applique aussi bien au cas actuel.

91. Emploi de la méthode des coefficients indéterminés. — Dans bien des cas, on se propose seulement de connaître la loi de formation des termes successifs de la formule de Taylor et l'on ne s'inquiète pas de l'expression du dernier terme. Le théorème du n° 84 qui établit l'unité du développement permet alors de se servir avec avantage de la méthode des coefficients indéterminés. En voici des exemples :

I. *Inverse d'une fonction.* — Supposons connu le développement de $f(x+h)$ par la formule de Taylor et proposons-nous d'obtenir celui de $1:f(x+h)$. On doit évidemment supposer $f(x)$ différent de zéro, sinon $1:f(x)$ étant infini, le second développement serait impossible.

Soit, par exemple,

$$f(x+h)=a_0+a_1h+a_2h^2+\ldots+a_{n-1}h^{n-1}+mh^n$$

et posons

$$\frac{1}{f(x+h)}=\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1h+\mathrm{A}_2h^2+\ldots+\mathrm{A}_{n-1}h^{n-1}+\mathrm{M}h^n.$$

Il s'agit de déterminer les coefficients A, connaissant les a. Pour cela, faisons passer Mh^n au premier membre de la seconde équation et multiplions membre à membre avec la première. Il viendra

$$1 - Mf(x+h)h^n = a_0 A_0 + (a_0 A_1 + a_1 A_0)h + \dots \\ + (a_0 A_{n-1} + a_1 A_{n-2} + \dots)h^{n-1} + \mu h^n,$$

où μ est linéaire par rapport à m et conserve, en même temps que m, une valeur finie, pour $h = 0$.

Egalons les coefficients des mêmes puissances de h jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$ dans les deux membres de cette équation ; nous formerons le système de *formules récurrentes* :

$$a_0 A_0 = 1,$$
$$a_0 A_1 + a_1 A_0 = 0,$$
$$a_0 A_2 + a_1 A_1 + a_2 A_0 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

qui déterminent de proche en proche A_0, A_1, A_2,... puisque $a_0 = f(x)$ est supposé différent de zéro. Enfin, ces coefficients sont bien ceux de Taylor, car en les substituant dans l'équation précédente elle se réduit à

$$-Mf(x+h)h^n = \mu h^n, \quad \text{d'où} \quad M = -\frac{\mu}{f(x+h)},$$

donc M conserve en même temps que μ une valeur finie quand h tend vers zéro.

II. *Fonction de fonction.* — Soit $u = f(x)$ et $F(u)$ une fonction composée de x ; supposons connus les développements :

$$F(u+k) - F(u) = A_1 k + A_2 k^2 + \dots + A_{n-1} k^{n-1} + M k^n$$
$$f(x+h) - f(x) = a_1 h + a_2 h^2 + \dots + a_{n-1} h^{n-1} + m h^n$$

et proposons-nous d'en déduire celui de $F(u+k)$ suivant les puissances de h dans l'hypothèse où $k = f(x+h) - f(x)$. Pour cela, on remplace, dans le premier développement, k par sa valeur tirée du second et l'on trouve

$$F[f(x+h)] - F[f(x)] = A_1(a_1 h + a_2 h^2 + \dots) \\ + A_2(a_1 h + a_2 h^2 + \dots)^2 \\ + A_3(a_1 h + a_2 h^2 + \dots)^3 \\ + \dots\dots\dots$$

Il suffit d'ordonner par rapport aux puissances de h jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$ pour obtenir le résultat demandé. Le dernier terme est un polynôme en M et m qui ne présente aucun intérêt particulier.

92. Détermination des dérivées n^{iemes}. — Le développement de $f(x+h)$ suivant les puissances de h et le calcul de $f^{(n)}(x)$ sont deux problèmes équivalents. En effet, cette dérivée s'obtient comme coefficient de $h^n : n!$ dans ce développement. Donc les méthodes que nous venons d'indiquer

peuvent aussi servir au calcul de la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction. Nous allons en donner un exemple important.

Dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction de fonction. — Elle résulte de la formule qui termine le numéro précédent. Le coefficient de h^n dans le second membre peut se mettre sous la forme

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \mathfrak{P}_k,$$

en désignant par $\mathfrak{P}_k$ le coefficient de h^n dans l'expression

$$(a_1 h + a_2 h^2 + \ldots)^k.$$

La quantité $\mathfrak{P}_k$ se calculera donc par la formule suivante :

$$\mathfrak{P}_k = \sum \frac{k!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} (a_1)^\alpha (a_2)^\beta (a_3)^\gamma \cdots,$$

dans laquelle la sommation s'étend à toutes les décompositions de k en une somme d'entiers positifs

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots = k,$$

satisfaisant, en même temps, à la condition

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \cdots = n.$$

La dérivée $D_x^n\, F(u)$ s'obtiendra en multipliant par $n!$ le coefficient que nous venons de calculer. On trouve ainsi, après avoir remplacé les quantités A et a par leurs expressions sous forme de dérivées,

$$D_x^n\, F(u) = \sum_{k=1}^{n} F^{(k)}(u) P_k$$

$$P_k = \frac{n!}{k!} \mathfrak{P}_k = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots} \left(\frac{Du}{1!}\right)^\alpha \left(\frac{D^2 u}{2!}\right)^\beta \cdots$$

Donc P_k est un polynôme en Du, D^2u,. . de degré k et de poids n, c'est-à-dire que la somme des indices de dérivation est n dans chaque terme. On n'obtient ce polynôme sous forme explicite que dans des cas particuliers (voir les exercices qui suivent).

Exercices.

1. Montrer que les expressions du dernier terme de la formule de Maclaurin qui correspondent aux formes de *Schlomilch* et de *Cauchy* pour la formule de Taylor (n° 86) sont respectivement :

$$\frac{x^n (1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n)}(\theta x), \qquad \frac{x^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\theta x).$$

2. Montrer que, si l'on choisit la forme de Cauchy, les derniers termes des développements de

$$(1+x)\,\mathrm{Log}\,(1+x), \qquad (1+x)^m$$

suivant les puissances de x sont respectivement :

$$\pm \frac{x^n}{n}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)} x^n (1+\theta x)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

3. Montrer que ces deux expressions ont pour limite 0 pour $n = \infty$ pourvu que x soit > -1 et < 1, tandis que cette démonstration n'est pas possible sur les formes obtenues au n° 89.

4. Développer par la formule de Maclaurin les fonctions :

$$\text{arc tg } x, \qquad \text{arc sin } x, \qquad e^{ax}\cos bx.$$

R. On se sert des dérivées $n^{ième}$ obtenues dans le chapitre I, § 3.

5. Dérivée $n^{ième}$ de $f(e^x)$ — Soient $e^x = u$ et

$$k = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1) = e^x\left(h + \frac{h^2}{1.2} + \ldots\right);$$

il faut chercher le coefficient de $h^n : n\,!$ dans

$$f(u+k) - f(u) = \frac{f'(u)}{1} k + \frac{f''(u)}{1.2} k^2 + \ldots$$

Comme k renferme h en facteur, h^n ne se trouvera que dans les n premiers termes. Le coefficient de $h^n : n\,!$ dans

$$k^m = e^{mx}(e^h - 1)^m = e^{mx}\left(e^{mh} - me^{(m-1)h} + \frac{m(m-1)}{1.2}e^{(m-2)h} - \ldots\right)$$

s'obtient en développant séparément ces exponentielles. Il sera de la forme $A_m e^{mx}$, où A_m est un coefficient numérique :

$$A_m = m^n - m(m-1)^n + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^n - \ldots$$

Donc le coefficient de $h^n : n\,!$ dans $f(u+k) - f(u)$ sera

$$D^n f(e^x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{A_m}{m\,!} e^{mx} f^{(m)}(u).$$

6. Dérivée $n^{ième}$ de e^{ax^2}. — On a

$$e^{a(x+h)^2} - e^{ax^2} = e^{ax^2}\left(e^{ah(2x+h)} - 1\right)$$

$$= e^{ax^2}\left[\frac{ah(2x+h)}{1} + \frac{a^2h^2(2x+h)^2}{1.2} + \ldots\right]$$

Cherchant le coefficient de $h^n : n\,!$, on trouve

$$D^n e^{ax^2} = e^{ax^2}\left[(2x)^n a^n + \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2}a^{n-1}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4}a^{n-2} + \ldots\right]$$

7. Dérivée $n^{\text{ième}}$ de $e^{\frac{a}{x}}$. — On a

$$e^{\frac{a}{x+h}} - e^{\frac{a}{x}} = e^{\frac{a}{x}}\left[e^{-\frac{ah}{x(x+h)}} - 1\right]$$

$$= e^{\frac{a}{x}}\left[-\frac{ah}{x^2}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{-1} + \frac{1}{2!}\left(\frac{ah}{x^2}\right)^2\left(1+\frac{h}{x}\right)^{-2} + \dots\right].$$

On développe les puissances négatives par la formule du binôme. Alors cherchant le coefficient de $h^n : n!$, on trouve

$$\mathrm{D}^n e^{\frac{a}{x}} = \frac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{\frac{a}{x}}\left[a^n + \frac{n}{1}(n-1)xa^{n-1}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)(n-2)x^2a^{n-2} + \dots\right].$$

8. Dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x^2)$. — Soit $x^2 = u$; on aura

$$\mathrm{D}^n f(x^2) = (2x)^n f^{(n)}(u) + \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} f^{(n-1)}(u) + \dots$$

Cette dérivée s'obtient en remplaçant dans celle de e^{ax^2} (Exercice 6) les puissances de a par les dérivées successives de $f(u)$ et en y supprimant le facteur e^{ax^2}. On le justifie en observant que l'on a

$$\mathrm{D}^n f(x^2) = \sum_1^n f^{(k)}(u)\,\mathrm{P}_k.$$

Comme P_k est indépendant de f, on le détermine en choisissant $f(u) = e^{au}$, auquel cas P_k sera le coefficient de $a^k e^{au}$.

9. Dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f\left(\frac{1}{x}\right)$. — Méthode analogue. Soit $\frac{1}{x} = u$; on obtient la dérivée demandée au moyen de celle de $e^{\frac{a}{x}}$. Il faut supprimer dans celle-ci (exercice 7) le facteur $e^{\frac{a}{x}}$ et remplacer les puissances successives de a par les dérivées successives de $f(u)$.

10. Déduire de l'exercice 5 la valeur de $\mathrm{D}^n \dfrac{1}{e^x - 1}$.

11. En se servant de la théorie des exponentielles imaginaires qui sera exposée plus loin : 1° Déduire de l'exercice 6 les valeurs de :

$$\mathrm{D}^n \sin x^2, \qquad \mathrm{D}^n \cos x^2 ;$$

2° Déduire de l'exercice 5 celles de :

$$\mathrm{D}^n \operatorname{tg} x, \qquad \mathrm{D}^n\, 1/\sin x, \qquad \mathrm{D}^n\, 1/\cos x.$$

§ 3. Vraies valeurs des expressions indéterminées.

93. Définition. — Soit $f(x)$ une fonction qui devient indéterminée pour $x = a$; on nomme *vraie valeur* de cette fonction pour $x = a$ la limite vers laquelle tend $f(x)$ quand x tend vers a. Cette vraie valeur

peut être finie, infinie ou indéterminée suivant que la limite, qui lui sert de définition, est elle-même déterminée, infinie ou indéterminée.

Ainsi, par exemple, la fonction $\frac{\sin x}{x}$ devient indéterminée pour $x = 0$ et sa vraie valeur est l'unité (n° 62, IV). La fonction $\sin\frac{1}{x}$ devient indéterminée pour $x = 0$, mais sa vraie valeur est indéterminée car $\sin\frac{1}{x}$ ne tend vers aucune limite quand x tend vers zéro.

94. Forme $\frac{0}{0}$. — Celle-ci se rencontre quand les deux termes d'une fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ s'annulent simultanément pour $x = a$, de telle sorte que l'on ait

$$f(a) = 0, \qquad F(a) = 0.$$

Supposons que $f(x)$ et $F(x)$ aient des dérivées bien déterminées dans le voisinage de la valeur $x = a$, on aura le théorème suivant :

Si le rapport $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ des dérivées des deux termes de la fraction tend vers une limite déterminée ou vers l'infini quand x tend vers a, sans que $F'(x)$ passe par la valeur O, cette limite ou l'infini sera la vraie valeur de la fraction proposée.

Le théorème du n° 79 s'applique en effet, et l'on a

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f'(a+\theta h)}{F'(a+\theta h)}$$

Si l'on fait tendre h vers zéro dans cette équation, la quantité θh, qui est la même aux deux termes du second membre, tendra aussi vers zéro, d'où résulte la démonstration du théorème.

On en conclut la règle suivante :

Règle de l'Hospital. — *Pour obtenir la vraie valeur d'une fraction de la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = a$, on lui substitue une nouvelle fraction dont les deux termes sont les dérivées des termes de la première et l'on cherche la valeur de cette fraction pour $x = a$. Si cette nouvelle fraction est de nouveau indéterminée, sa vraie valeur sera aussi celle de la première. Pour l'obtenir on appliquera derechef la même règle et ainsi de suite.*

Toutefois, eu égard aux conditions du théorème précédent, cette règle n'est démontrée que moyennant les deux restrictions suivantes : 1° Elle conduit à un résultat bien déterminé ; 2° les dérivées $F'(x)$, $F''(x)$,... prises comme dénominateurs, ne s'annulent qu'un nombre

limité de fois quand x tend vers a (auquel cas, on peut supposer x suffisamment voisin de a pour qu'elles ne s'annulent plus).

Remarque. — La règle de l'Hospital reste applicable même au cas où $a = \infty$, pourvu que $f'(x)$ et $F'(x)$ existent pour toutes les valeurs de x et que $F'(x)$ n'ait qu'un nombre limité de racines pour x indéfiniment croissant. En effet, on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=0} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{F\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas où a est fini; on peut appliquer la règle de l'Hospital, qui donne

$$\lim_{x=0} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{F\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x=0} \frac{-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2} F'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

et c'est ce qu'il fallait établir.

95. Forme $\frac{\infty}{\infty}$. — *La règle de l'Hospital s'applique aussi à la détermination de la vraie valeur des fractions, dont les deux termes croissent indéfiniment en valeur absolue, pour une valeur particulière de x.*

Cette règle reste soumise aux mêmes restrictions que précédemment. Donc on admettra, pour l'établir, que les dérivées $f'(x)$ et $F'(x)$ sont déterminées et que $F'(x)$ est différente de zéro pour les valeurs de x suffisamment rapprochées de a. Soient x_0 et x deux valeurs suffisamment rapprochées de a pour réaliser cette condition, mais toutes deux $> a$ ou toutes deux $< a$; on aura, par la formule de Cauchy, ξ étant intermédiaire entre x et x_0,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{F(x) - F(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

Par cette formule, $f(x) : F(x)$ se décompose en un produit de trois facteurs

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{F(x) - F(x_0)}{F(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

Si $f'(x) : F'(x)$ a une limite déterminée A pour $x = a$, on peut d'abord rendre le troisième facteur aussi voisin que l'on veut de A, à condition de supposer $|x - a|$ et $|x_0 - a|$ et par suite $|\xi - a|$ suffisamment petits, par exemple $< \delta$. Ensuite, x_0 restant fixe, on

peut, sans cesser de satisfaire à cette condition, rendre les deux autres facteurs aussi voisins que l'on veut de l'unité, à condition de prendre x suffisamment voisin de a, car $f(x)$ et $F(x)$ augmentent indéfiniment quand x tend vers a, tandis que $f(x_0)$ et $F(x_0)$ restent fixes. Donc $f(x) : F(x)$ diffère aussi peu que l'on veut de A quand x tend vers a et a, par conséquent, pour limite A.

On voit de même que si $f'(x) : F'(x)$ augmentait indéfiniment quand x tend vers a, $f(x) : F(x)$ serait dans le même cas.

Remarque. — L'application de la règle de l'Hospital dans le cas précédent peut paraître illusoire, car, si une fonction $f(x)$ devient infinie pour une valeur finie a de x, on sait que sa dérivée ne peut pas conserver une valeur finie quand x tend vers a (n° 72). Cependant cette règle est souvent utile, parce que le rapport des dérivées peut se prêter à des transformations qui mettent sa vraie valeur en évidence, tandis que la chose eût été moins simple pour le rapport des fonctions primitives.

96. Autres formes d'indétermination. — Les autres formes d'indétermination les plus importantes sont :

$$\infty - \infty, \qquad 0.\infty \quad \text{et} \quad 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

La première se présente lorsque les deux termes de la différence $f(x) - F(x)$ augmentent indéfiniment pour $x = a$; la seconde, lorsque des deux facteurs du produit $f(x).F(x)$ l'un tend vers zéro et l'autre vers l'infini. Ces deux formes se ramènent immédiatement à la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, par de simples transformations algébriques, en écrivant ces expressions sous forme de fraction. Dans le premier cas, on pourra toujours poser, par exemple,

$$f(x) - F(x) = \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{f}\right) : \left(\frac{1}{F.f}\right).$$

Quant aux trois dernières formes d'indétermination, on cherchera la vraie valeur de leur logarithme qui sera de l'une des formes déjà examinées. On sera donc conduit, dans tous les cas, à appliquer la règle de l'Hospital.

97. Utilisation de la formule de Taylor. — Dans la plupart des cas où l'indétermination ne disparaît qu'après un usage répété de la règle de l'Hospital, une application judicieuse de la formule de Taylor

conduira beaucoup plus rapidement au résultat que la règle en question.

Si la fonction $\varphi(a+h)$ qui devient indéterminée pour $h=0$ est composée au moyen de fonctions développables par la formule de Taylor, en substituant à ces fonctions ou à quelques-unes d'entre elles leur développement suivant les puissances de h et en poussant ce développement suffisamment loin, il pourra se faire, en supprimant les puissances de h qui se détruisent, que l'indétermination disparaisse et l'on obtiendra la vraie valeur cherchée.

Pour fixer les idées, supposons qu'une fraction $\frac{f(a)}{F(a)}$ ait la forme $\frac{0}{0}$. Si $f(a+h)$ et $F(a+h)$ sont développables par la formule de Taylor, et si l'on peut pousser ces développements suffisamment loin pour que tous leurs coefficients ne s'annulent pas, en les substituant dans la fraction $\frac{f(a+h)}{F(a+h)}$, il y aura une puissance de h en facteur dans les deux termes, et en supprimant le facteur commun, l'indétermination pour $h=0$ aura disparu.

En voici un exemple. Soit à trouver

$$\lim_{x=0} \frac{x-\sin x}{x^3}.$$

Si l'on remplace au numérateur $\sin x$ par $\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)$ et si l'on divise par x^3, on trouve

$$\lim_{x=0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim\left(\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots\right) = \frac{1}{6}$$

Exercices

1. Expressions de la forme $\frac{0}{0}$. On a, x tendant vers zéro,

$$\lim \frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x} = 1$$

$$\lim \frac{\operatorname{Log}(1+x+x^2)+\operatorname{Log}(1-x+x^2)}{x(e^x-1)} = 1$$

$$\lim \frac{x-\operatorname{tg} x}{x^3} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim \frac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6} = \frac{1}{6}$$

2. Expressions de la forme $\infty-\infty$. On a, pour $\lim x = 0$,

$$\lim\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right) = \frac{2}{3}$$

$$\lim \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cot x}{x}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\lim \left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim \left(\frac{\pi x - 1}{2x^2} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x} - 1)}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

3. Autres formes d'indétermination.

$0.\infty$ $\quad \lim\limits_{x=\infty} x \operatorname{Log} \frac{x-a}{x+a} = -2a$

0^0 $\quad \lim\limits_{x=+0} x^x = 1$

$1.\infty$ $\quad \lim\limits_{x=\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \frac{1}{e}$

∞^0 $\quad \lim\limits_{x=\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$

1^∞ $\quad \lim\limits_{x=0} (\cos ax)^{\operatorname{cosec}^2 bx} = e^{-\frac{a^2}{2b^2}}$

§ 4. Maxima et minima des fonctions d'une seule variable.

98. Définitions. — On dit qu'une fonction $f(x)$ est maximum ou minimum pour une valeur a de la variable x, lorsque la différence $f(a+h) - f(a)$ garde le même signe, pour toutes les valeurs de h inférieures en valeur absolue à un nombre positif ε suffisamment petit. Le ~~maximum~~ correspond au cas où cette différence est négative, et alors $f(a)$ est $> f(x)$, pourvu que x soit suffisamment voisin de a ; le minimum correspond au cas où cette différence est positive, et alors $f(a)$ est $< f(x)$, pourvu que x soit suffisamment voisin de a.

Géométriquement, si l'on construit la courbe $y = f(x)$, les maxima et minima correspondront aux points tels que M et M′ de la courbe (fig. 2), où l'ordonnée MP est plus grande et l'ordonnée M′Q plus petite que les ordonnées suffisamment voisines.

Fig. 2.

Il est très important de remarquer que, suivant ces définitions, un maximum ou un minimum de la fonction n'est pas nécessairement la plus grande ou la plus petite valeur de

cette fonction dans tout l'intervalle où l'on considère la variable x, mais seulement une plus grande ou une plus petite valeur dans un intervalle suffisamment petit, quel que réduit qu'il faille le supposer. Rien n'empêche donc qu'une fonction ait plusieurs maxima ou plusieurs minima dans un intervalle donné.

99. Théorème. — *Les seuls points où $f(x)$ puisse être maximum ou minimum sont ceux où sa dérivée s'annule ou cesse d'exister.*

C'est une conséquence du corollaire du théorème du n° 66. Si $f'(x)$ existe et n'est pas nul, $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$, ayant le signe de $h f'(x)$, changera de signe avec h et, par conséquent, il ne pourra y avoir ni maximum ni minimum.

On remarquera que les points où $f'(x)$ s'annule sont ceux où la tangente à la courbe $y = f(x)$ est parallèle à l'axe des x, comme on l'a représenté dans la figure (2).

100. Supposons maintenant que les dérivées des deux premiers ordres de $f(x)$ existent et soient continues. Les seules valeurs de x qui pourront rendre $f(x)$ maximum ou minimum seront les racines de l'équation $f'(x) = 0$. Soit a une de ces racines; la formule de Taylor donnera, en prenant $n = 2$ (n° 83),

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^2}{1.2} f''(a + \theta h).$$

Si $f''(a)$ n'est pas nul, $f''(a+\theta h)$ sera du signe de $f''(a)$ pour $|h|$ suffisamment petit. Donc, h^2 étant toujours positif, la différence sera du signe de $f''(a)$ et $f(a)$ sera :

maximum, si $f''(a) < 0$, minimum, si $f''(a) > 0$.

Passons maintenant au cas général. Supposons que les dérivées de $f(x)$ soient déterminées et continues jusqu'à l'ordre n et que $f^{(n)}(x)$ soit la première dérivée qui ne s'annule pas pour $x = a$. La formule de Taylor donne, dans cette hypothèse,

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h).$$

On peut supposer $|h|$ suffisamment petit pour que $f^{(n)}(a+\theta h)$ ait le signe de $f^{(n)}(a)$ quel que soit le signe de h. Si n est impair, le second membre changera de signe avec h et il n'y aura ni maximum ni minimum ; si, au contraire, n est pair, le second membre aura le signe de $f^{(n)}(a)$ quel que soit celui de h, il y aura maximum si cette dérivée est négative et minimum si elle est positive. D'où la règle suivante :

101. Première règle. — *Pour trouver les maxima et les minima d'une fonction continue $f(x)$ dans un intervalle où sa dérivée reste finie et continue, on cherche les racines de cette dérivée. Soit a l'une d'elles. On substitue cette racine dans les dérivées successives de $f(x)$ supposées continues jusqu'à ce qu'on en trouve une qui ne s'annule pas pour $x = a$. Si cette dérivée est d'ordre impair, il n'y a ni maximum ni minimum ; si elle est d'ordre pair, il y a maximum si elle est négative, et minimun si elle est positive.*

Il n'est pas toujours nécessaire de calculer les dérivées seconde, troisième, etc... de $f(x)$ pour décider s'il y a maximum ou minimum. D'autre part, la règle précédente ne s'applique pas aux points où la dérivée cesse d'exister. Voici une autre règle, dont l'emploi s'impose pour la discussion des cas où la dérivée est discontinue pour $x = a$.

102. Deuxième règle. — *Soit $f(x)$ une fonction ayant une dérivée déterminée $f'(x)$ dans le voisinage du point a (le point a lui-même pouvant faire exception). Supposons que $f'(x)$ ait, dans le voisinage du point a, un signe unique pour $x < a$, et un signe unique pour $x > a$. Faisons passer x par la valeur a en croissant ; il y aura : 1° minimum au point a si $f'(x)$ passe du négatif au positif ; 2° maximum si $f'(x)$ passe du positif au négatif ; 3° ni maximum ni minimum si $f'(x)$ ne change pas de signe.*

En effet, posons $x = a + h$ et considérons la relation

$$f(a+h) - f(a) = h f'(a + \theta h)$$

où h reçoit successivement des valeurs de signes contraires : 1° Si $f'(a+\theta h)$ a toujours le signe de h, $f(a+h) - f(a)$ sera toujours > 0 ; 2° si $f'(a+\theta h)$ et h ont toujours des signes contraires, $f(a+h) - f(a)$ sera toujours < 0 ; 3° si $f'(a+\theta h)$ ne change pas de signe avec h, $f(a+h) - f(a)$ changera de signe avec h. Donc, d'après la définition d'un maximum ou d'un minimum, la règle est établie dans les trois cas.

La règle peut encore se justifier non moins simplement en remarquant que, dans le premier cas, $f(x)$ diminue jusqu'à ce que x ait atteint la valeur a pour augmenter ensuite ; que, dans le second, la fonction augmente, tant que x est $< a$, pour décroître ensuite ; enfin, que, dans le troisième, la fonction continue à croître ou bien continue à décroître après que x a passé par la valeur a.

Remarques. — 1° En principe, la première règle est plus simple

que la seconde, car elle n'exige que le calcul de valeurs particulières de certaines fonctions, tandis que la seconde demande l'étude de la manière dont varie une fonction. Cependant, en pratique, on rencontre le plus souvent des fonctions bien connues dont le mode de variation est familier. Aussi, dans bien des cas où la première règle est applicable, la seconde est encore plus expéditive.

2° Enfin, il arrive aussi que le problème que l'on veut résoudre comporte nécessairement une solution, soit un maximum, soit un minimum. Dans ce cas, si l'on ne trouve qu'une seule valeur de x qui annule ou rende discontinue la dérivée première, il sera inutile d'aller plus loin, cette valeur fournira la réponse à la question.

103. Maxima et minima correspondant aux points de discontinuité de la dérivée. — Si $f'(x)$ devient discontinue pour $x = a$, la seconde règle indique qu'il peut y avoir maximum ou minimum de la fonction. Cela peut se présenter surtout de deux manières différentes : 1°) La dérivée $f'(x)$ change de signe en passant par l'infini quand x passe par la valeur a. Supposons, par exemple, que $f'(x)$ passe du positif au négatif; la courbe $y = f(x)$ affecte, dans le voisinage de $x = a$, l'allure de la courbe AB dans le voisinage du point M (fig. 3). Le point M s'appelle un *point de rebroussement* et l'on voit sur la figure que l'ordonnée MP est un maximum. 2°) La dérivée saute brusquement d'une valeur à une autre valeur de signe contraire. Supposons que ce soit d'une valeur négative à une valeur positive; la courbe $y = f(x)$ affecte alors, dans le voisinage de $x = a$, l'allure de la courbe AB au point M' (fig. 3). En ce point la tangente passe brusquement d'une inclinaison à une autre, de sorte qu'en réalité deux courbes viennent se réunir en M' sous une inclinaison différente. Le point M' est ce qu'on appelle un *point saillant* et l'on reconnait sur la figure que l'ordonnée M'Q est effectivement minimum.

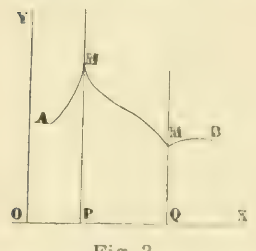


Fig. 3.

EXERCICES.

1. *Maxima et minima d'un polynome.* Soit le polynôme

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots$$

On trouve ses maxima et ses minima en étudiant les changements de

signes de sa dérivée (règle II). Soient a_1, a_2,... les racines réelles *de degré impair* de $f'(x)$ *rangées par ordre de grandeur décroissante.* On aura

$$f'(x) = m\,A_0\,x^{m-1} + \cdots = A_0\,(x - a_1)^{\lambda_1}\,(x - a_2)^{\lambda_2} \cdots \varphi(x),$$

les lettres λ désigneront des entiers impairs et $\varphi(x)$ sera nul ou positif. Supposons $A_0 > 0$; pour $x = +\infty$, $f'(x)$ est égal à $+\infty$, ensuite $f'(x)$ change de signe chaque fois que x passe en décroissant par une des valeurs a_1, a_2,... Donc $f(a_1)$ est un minimum, $f(a_2)$ un maximum, et ainsi de suite alternativement. Si A_0 était négatif, l'ordre serait inverse.

2. *Maxima et minima d'une fraction rationnelle.* Soit $f(x) = P : Q$. Il faut étudier les changements de signes de la dérivée $(P'Q - PQ') : Q^2$ ou, ce qui revient au même, ceux du polynôme $P'Q - PQ'$. On opère donc comme dans l'exercice (1). Les racines d'ordre impair de ce polynôme rangées par ordre de grandeur décroissante donneront alternativement : 1° des minima et des maxima si ce polynôme a son premier terme affecté d'un coefficient positif ; 2° des maxima et des minima si ce coefficient est négatif. Il peut arriver qu'une racine de degré impair de $P'Q - PQ'$ soit en même temps racine de Q. Dans ce cas, c'est une racine de degré pair de Q et elle rend $f(x)$ infinie positive ou infinie négative, mais il n'y a pas d'inconvénient à considérer, par extension, une valeur semblable comme un maximum ou comme un minimum de la fonction.

Remarque. On verra, dans le calcul intégral, qu'on peut former un polynôme ayant pour dérivée $P'Q - PQ'$. Il existe donc toujours un polynôme ayant les mêmes maxima et les mêmes minima qu'une fonction rationnelle donnée.

3. Maximum et minimum de $x^3 - 2x^2 + 1$.

R. La dérivée a deux racines simples : $\frac{4}{3}$ (minimum) et 0 (maximum).

4. Maximum et minimum de $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$.

R. L'expression $P'Q - PQ'$ a deux racines simples : 2 (minimum) et 0 (maximum).

5. Maximum de $(a + x)^{\alpha}\,(a - x)^{\beta}$, α et $\beta > 0$.

R. $x = a\,\dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$.

6. Maximum de $\dfrac{\operatorname{Log} x}{x}$ (R. $x = e$) ; de $x^m e^{-x^2}$ $\left(\text{R. } x = \sqrt{\dfrac{m}{2}}\right)$.

7. Maxima et minima de $e^x \sin x$.

R. $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (minima), $x = (2k + 1)\,\pi - \frac{\pi}{4}$ (maxima).

8. Montrer que la fonction $(4 \cos x + \cos 2x)$ est maximum ou minimum en même temps que $\cos x$.

R. On a $f'(x) = -4 \sin x (1 + \cos x)$. Les changements de signes de $f'(x)$ sont les mêmes que ceux de $-\sin x = D \cos x$.

9. Avec trois côtés égaux former un trapèze d'aire maximum.

R. Soit φ l'angle à la base du trapèze. Il faut rendre maximum la fonction $\sin \varphi (1 + \cos \varphi) = 4 \sin \frac{\varphi}{2} \cos^3 \frac{\varphi}{2}$, d'où $\varphi = 60^o$. Le trapèze est formé par trois côtés et la diagonale d'un hexagone inscrit.

10. Trouver sur une droite donnée OX un point P tel que la somme de ses distances à deux points donnés A et B soit un minimum.

R. Les deux droites AP et BP doivent être également inclinées sur OX.

11. Etant donné un cône droit, on demande de le couper parallèlement à la génératrice par un plan tel, que le segment parabolique résultant soit le plus grand possible.

R. Soient a le rayon de la base du cône, x la portion de ce rayon entre la génératrice et le plan sécant. On trouve $x = \frac{a}{2}$.

12. Dans un levier du second genre, pesant et homogène, quel doit être le bras de levier x de la puissance Q, pour que celle-ci soit un minimum, le moment M de la résistance étant donné ?

R. Soit g le poids de l'unité de longueur du levier. On trouve $gx^2 = 2M$, $Q = \sqrt{2Mg}$.

§ 5. Décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples.

104. Objet de cette décomposition. — On appelle *fraction simple* une fraction dont le numérateur est une constante et le dénominateur une simple puissance d'un binôme, telle que $(z - a)^n$. Nous allons montrer, en nous servant du développement d'une fraction rationnelle par la formule de Taylor, que toute fraction rationnelle peut se décomposer en un polynôme entier et une somme de fractions simples. Nous verrons plus tard, dans le calcul intégral, toute l'importance de cette décomposition.

105. Formule de décomposition. — Soit à décomposer la fraction rationnelle

$$\frac{f(z)}{F(z)}.$$

Si cette expression n'était pas une fraction proprement dite, en effectuant la division, on la décomposerait en un polynôme entier et une fraction proprement dite. Nous pouvons donc admettre *a priori* que cette opération ait été faite et que $f(z)$ soit de degré moindre que $F(z)$.

Soient $a, b, \ldots l$ les racines réelles ou complexes de $F(z)$, $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ leurs degrés de multiplicité respectifs. On aura d'abord

$$F(z) = (z - a)^\alpha F_1(z),$$

$F_1(z)$ ayant toutes les mêmes racines que $F(z)$ sauf la racine a. La fraction $f(z) : F_1(z)$, n'étant plus infinie pour $z = a$, peut se développer par la formule de Taylor (nº 90) sous la forme

$$(1) \qquad \frac{f(z)}{F_1(z)} = A_0 + A_1(z-a) + \cdots + A_{\alpha-1}(z-a)^{\alpha-1} + M_1(z-a)^\alpha$$

d'où, en divisant par $(z-a)^\alpha$,

$$(2) \qquad \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{A_0}{(z-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(z-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{z-a} + M_1.$$

Le dernier terme M_1 est, comme on le sait (nº 90), une fraction proprement dite ayant pour dénominateur $F_1(z)$. Les termes précédents sont des fractions simples. On est ainsi ramené à décomposer la fraction

$$M_1 = \frac{f_1(z)}{F_1(z)}.$$

Pour cela, on recommence la même opération. On pose

$$F_1(z) = (z - b)^\beta F_2(z),$$

de sorte que $F_2(z)$ admet les mêmes racines que $F(z)$ sauf les deux racines a et b. En développant $f_1 : F_2$ suivant les puissances de $(z - b)$ et en divisant par $(z - b)^\beta$, il vient

$$M_1 = \frac{f_1(z)}{F_1(z)} = \frac{B_0}{(z-b)^\beta} + \frac{B_1}{(z-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{(z-b)} + M_2$$

et on est amené à décomposer la fraction rationnelle M_2 qui a pour dénominateur $F_2(z)$.

On continue ainsi de suite de manière à épuiser toutes les racines de $F(z)$. Quand on arrive à la dernière, il n'y a plus qu'à décomposer une fraction proprement dite M de la forme

$$M = \frac{\varphi(z)}{(z-l)^\lambda}$$

et l'opération s'arrête, car, après avoir développé le polynôme $\varphi(z)$ de degré $< \lambda$ suivant les puissances de $z - l$, on trouve

$$M = \frac{L_0}{(z-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(z-l)^{\lambda-1}} + \cdots \frac{L_{\lambda-1}}{(z-l)},$$

sans nouveau terme complémentaire.

Substituons maintenant, de proche en proche, dans l'équation (1) les développements de M_1, M_2.... M, nous trouverons la formule de décomposition de $f(z) : F(z)$ en fractions simples :

$$\frac{f(z)}{F(z)} = \frac{A_0}{(z-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(z-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{z-a}$$
$$+ \frac{B_0}{(z-b)^\beta} + \frac{B_1}{(z-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{z-b}$$
$$+ \cdots$$
$$+ \frac{L_0}{(z-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(z-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_{\lambda-1}}{z-l}.$$

106. Unité du développement. Valeurs des coefficients. — Le développement que nous venons d'écrire n'est possible que d'une seule manière, car nous allons montrer que les valeurs des coefficients s'obtiennent immédiatement sous forme de dérivées.

A cet effet, définissons la fonction $A(z)$ comme il suit :

$$A(z) = (z-a)^\alpha \frac{f(z)}{F(z)}$$

et multiplions la formule de décomposition par $(z-a)^\alpha$. Nous obtiendrons un résultat de la forme

$$A(z) = A_0 + A_1(z-a) + \cdots + A_{\alpha-1}(z-a)^{\alpha-1} + M(z-a)^\alpha,$$

M gardant une valeur finie pour $z = a$. Donc les coefficients sont ceux de la formule de Taylor (n° 90) et l'on a

$$A_0 = A(a), \quad A_1 = \frac{A'(a)}{1\,!}, \quad A_2 = \frac{A''(a)}{2\,!}, \ldots, \quad A_{\alpha-1} = \frac{A^{(\alpha-1)}(a)}{(\alpha-1)\,!}$$

De même, en posant

$$B(z) = (z-b)^\beta \frac{f(z)}{F(z)},$$

on trouvera

$$B_0 = B(b), \quad B_1 = \frac{B'(b)}{1\,!}, \quad B_2 = \frac{B''(b)}{2\,!}, \ldots \quad B_{\beta-1} = \frac{B^{(\beta-1)}(b)}{(\beta-1)\,!}.$$

et ainsi de suite.

Les formules que nous venons d'écrire ramènent le calcul des coefficients à des déterminations de dérivées et peuvent déjà servir à la détermination pratique des coefficients. On peut employer aussi d'autres méthodes que nous allons indiquer.

107. Autres méthodes pour calculer les coefficients. — 1° On peut employer la *méthode des coefficients indéterminés*. On pose *a priori* la formule de décomposition dont la forme est connue, en laissant les numérateurs indéterminés. On chasse ensuite les dénominateurs en multipliant les deux membres par $F(z)$. En égalant les coefficients des mêmes puissances de z, on formera un système d'équations du premier degré en nombre suffisant pour déterminer les coefficients inconnus.

2° *Méthode de dérivations successives*. Soit, par exemple, à déterminer les coefficients A. Si l'on multiplie l'équation (1) du n° 105 par $F_1(z)$, qui est égal à $F(z) : (z-a)^\alpha$, il vient

$$f(z) - F_1(z)\left[A_0 + A_1(z-a) + \cdots + A_{\alpha-1}(z-a)^{\alpha-1}\right] = (z-a)^\alpha M_1 F_1(z)$$

d'où l'on conclut que le polynôme du premier membre admet la racine a au degré α. Donc il s'annule pour $z = a$ ainsi que ses $(\alpha - 1)$ premières dérivées. En le dérivant $(\alpha - 1)$ fois et en exprimant que ces conditions sont satisfaites, on obtient successivement

$$f(a) - F_1(a)\, A_0 = 0$$
$$f'(a) - F_1'(a)\, A_0 - F_1(a)\, A_1 = 0$$
$$f''(a) - F_1''(a)\, A_0 - 2F_1'(a)\, A_1 - 2F_1(a)\, A_2 = 0$$

et ainsi de suite. C'est un système d'équations récurrentes qui déterminent de proche en proche $A_0, A_1, A_2, \cdots$

3° Il est à remarquer qu'on peut arriver autrement au même système d'équations. On remplace z par $a + h$ dans le polynôme que l'on vient de dériver successivement, ce qui donne

$$f(a+h) - F_1(a+h)\left[A_0 + A_1 h + \cdots + A_{\alpha-1} h^{\alpha-1}\right];$$

puis on ordonne suivant les puissances de h jusque $h^{\alpha-1}$. En exprimant alors que les coefficients de toutes ces puissances sont nulles, on retrouve le système d'équations qui précède. Ce sont ces derniers calculs qui seront ordinairement les plus rapides.

108. Cas des racines simples. Formule de Lagrange. — Lorsque toutes les racines de $F(z)$ sont simples, le développement en fractions simples ne renferme qu'un seul terme relatif à chacune des racines et la formule de décomposition se réduit à la forme simple

$$\frac{f(z)}{F(z)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \cdots + \frac{L}{z-l}$$

Les coefficients A, B..., se déterminent alors par les formules

$$A = \lim_{z=a} \frac{(z-a) f(z)}{F(z)} = \frac{f(a)}{F'(a)}, \quad B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \cdots$$

que l'on trouve par la règle de l'Hospital. Dans le cas où il n'y a que des racines simples, la formule de décomposition sera donc la suivante :

$$\frac{f(z)}{F(z)} = \frac{f(a)}{F'(a)} \frac{1}{z-a} + \frac{f(b)}{F'(b)} \frac{1}{z-b} + \cdots$$

La formule de Lagrange n'est qu'une transformation de la précédente. On fait la substitution

$$F(z) = (z-a)(z-b)\cdots(z-l)\,;$$

d'où

$$F'(a) = (a-b)(a-c)\cdots(a-l)$$
$$F'(b) = (b-a)(b-c)\cdots(b-l)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En multipliant la formule de décomposition par $F(z)$, elle devient alors

$$f(z) = f(a)\frac{(z-b)(z-c)\cdots(z-l)}{(a-b)(a-c)\cdots(a-l)} + f(b)\frac{(z-a)(z-c)\cdots(z-l)}{(b-a)(b-c)\cdots(b-l)} + \cdots$$

On se sert de cette formule pour construire la fonction $f(z)$ entière de degré $< n$ qui prend n valeurs données $f(a)$, $f(b)$,... pour n valeurs données $a, b, \cdots l$ de z. C'est pourquoi cette formule s'appelle la *formule d'interpolation de Lagrange.*

109. Méthode rationnelle de décomposition. — On peut suivre une autre marche pour décomposer $f(z) : F(z)$ en fractions simples. Celle-ci est *théoriquement* supérieure à la précédente, parce qu'elle a sur elle l'avantage de ne faire intervenir les racines du dénominateur $F(z)$ que quand leur introduction est nécessaire et de pousser les calculs aussi loin que possible par des opérations purement rationnelles. Elle repose sur les théorèmes suivants, dont le premier se démontre en algèbre à l'occasion de la théorie du plus grand commun diviseur de deux polynômes ordonnés par rapport aux puissances d'une variable :

I. *Si P_1 et P_2 sont deux polynômes premiers entre eux, on peut toujours par des opérations rationnelles déterminer deux autres polynômes p_1 et p_2, qui vérifient la condition*

$$p_2 P_1 + p_1 P_2 = 1,$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{1}{P_1 P_2} = \frac{p_1}{P_1} + \frac{p_2}{P_2}.$$

II. *Si les deux polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux et si le polynôme f est de degré moindre que le produit P_1P_2, on pourra faire la décomposition*

$$(2) \qquad \frac{f}{P_1 P_2} = \frac{q_1}{P_1} + \frac{q_2}{P_2},$$

q_1 et q_2 étant des polynômes de degrés respectivement moindres que P_1 *et que* P_2 *et qui s'obtiennent par des calculs rationnels.*

En effet, en multipliant la relation (1) par f, il vient

$$\frac{f}{P_1P_2} = \frac{fp_1}{P_1} + \frac{fp_2}{P_2} = \frac{q_1}{P_1} + \frac{q_2}{P_2} + Q$$

où q_1 et q_2 sont respectivement les restes des divisions de fp_1 par P_1 et de fp_2 par P_2 et Q la somme des quotients entiers de ces deux divisions. Mais Q est identiquement nul, car il est égal dans l'équation précédente à une somme algébrique de fractions proprement dites qui ont toutes pour limite 0 pour $z = \infty$, tandis qu'un polynôme en z augmente indéfiniment pour $z = \infty$ à moins d'être identiquement nul.

III. *Si* P_1, P_2, P_3,⋯ *sont des polynômes premiers entre eux deux à deux et* f *un polynôme de degré moindre que le produit* $P_1P_2P_3\cdots$, *on pourra, par une suite d'opérations rationnelles, faire la décomposition*

$$\frac{f}{P_1P_2P_3\cdots} = \frac{q_1}{P_1} + \frac{q_2}{P_2} + \frac{q_3}{P_3} + \ldots$$

dans laquelle les numérateurs sont des polynômes de degrés respectivement moindres que les dénominateurs correspondants.

En posant d'abord $P'_2 = P_2P_3\cdots$, il vient par le théorème précédent,

$$\frac{f}{P_1P_2P_3\cdots} = \frac{f}{P_1P'_2} = \frac{q_1}{P_1} + \frac{q'_2}{P'_2}.$$

On est ainsi ramené à décomposer $q'_2 : P'_2$ et l'on continue ainsi de suite.

IV. *Soient* $F(z)$ *un polynôme,* P_1, P_2, P_3,⋯ *des polynômes sans racines multiples, mais ayant respectivement pour racines :* P_1 *les racines simples,* P_2 *les racines doubles,* P_3 *les racines triples,⋯ de* $F(z)$ *; ces polynômes* P_1, P_2, P_3,⋯ *peuvent s'obtenir au moyen de* F *par une suite d'opérations rationnelles.*

Soient D_1 le plus grand commun diviseur de F et de sa dérivée F', D_2 celui de F' et F'',⋯ ces diviseurs s'obtiennent par des calculs rationnels et l'on a

$$F = P_1P_2^2P_3^3\cdots, \quad D_1 = P_2P_3^2\cdots, \quad D_2 = P_3\cdots$$

On en tire

$$\frac{F}{D_1} = P_1P_2P_3\cdots, \quad \frac{D_1}{D_2} = P_2P_3\cdots$$

et en divisant successivement ces relations membre à membre on obtient P_1, P_2,⋯

V. *La décomposition* que nous voulons faire résulte des théorèmes précédents. Pour décomposer $f(z) : F(z)$ en fractions simples, on met d'abord, par le théorème IV, $F(z)$ sous la forme

$$F(z) = P_1P_2^2P_3^3\cdots$$

Il vient ensuite par le théorème II

$$\frac{f(z)}{F(z)} = \frac{q_1}{P_1} + \frac{q_2}{P_2^2} + \frac{q_3}{P_3^3} + \cdots$$

et cette décomposition est entièrement obtenue par des calculs rationnels. Mais les fractions composantes ne sont pas encore, en général, des fractions simples, de sorte que la décomposition est incomplète.

Remarques. — 1° Pratiquement, pour obtenir la formule précédente, on déterminera les polynômes P_1, $P_2, \cdots$ comme ci-dessus (IV); puis, cela fait, on déterminera q_1, $q_2, \cdots$ par la méthode des coefficients indéterminés en les remplaçant dans la formule précédente par les expressions générales de polynômes de degrés respectivement moindres que P_1, que $P_2^2, \cdots$ Les coefficients inconnus de ces polynômes seront des fonctions rationnelles des coefficients de f et de F.

2° La décomposition ne peut être menée plus loin par des calculs rationnels que si les polynômes P_1, $P_2, \cdots$ sont réductibles, ce qui n'est pas le cas général. Pour achever la décomposition en fractions simples, on est donc obligé de recourir aux procédés des numéros précédents et d'introduire les racines de P_1, de $P_2, \cdots$ dans les calculs.

Exercices.

Démontrer les formules de décomposition proposées dans les exercices 1 à 5.

1. $$\frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{x-1} + \frac{(-4)}{x-2} + \frac{\left(\frac{9}{2}\right)}{x-3}$$

2. $$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}-i}{2x-1-i\sqrt{3}} + \text{terme conjugué.}$$

3. $$\frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(a)}{(x-a)^n} + \frac{1}{1}\,\frac{f'(a)}{(x-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$

4. $$\frac{1}{(x-a)^m(x-b)^n} = \frac{1}{c^n}\left[\frac{1}{(x-a)^m} - n\,\frac{1}{c\,(x-a)^{m-1}} + \frac{n(n+1)}{1.2}\,\frac{1}{c^2(x-a)^{m-2}} + \cdots\right]$$
$$+ \frac{1}{(-c)^m}\left[\frac{1}{(x-b)^n} + m\,\frac{1}{c\,(x-b)^{n-1}} + \frac{m(m+1)}{1.2}\,\frac{1}{c^2(x-b)^{n-2}} + \cdots\right]$$

On a posé $c = a - b$ et on arrête les développements quand ils cessent d'être fractionnaires.

R. Les coefficients des puissances négatives de $(x-a)$ s'obtiennent, en effet, en développant l'expression

$$(x-b)^{-n} = \frac{1}{c^n}\left(1 + \frac{x-a}{c}\right)^{-n}$$

suivant les puissances de $(x-a)$, ce qui se fait par la formule du binôme.

5. $$\frac{1}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{(2i)^n}\left[\frac{1}{(x-i)^n} - n\frac{1}{2i(x-i)^{n-1}} + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\frac{1}{(2i)^2(x-i)^{n-2}} + \cdots\right].$$

+ les termes conjugués.

R. C'est un cas particulier de l'exercice précédent.

6. Décomposer $\frac{1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$.

R. La décomposition se ramène à la précédente en posant $x-\alpha=\beta z$.

7. Décomposer $\frac{f(x)}{(x-a)^m(x-b)^n}$.

R. Le développement s'obtient en multipliant par $f(x)$ la décomposition de l'exercice 4, puis en décomposant tous les termes du second membre par la formule de l'exercice 3. On suppose le degré de $f(x)$ inférieur à $m+n$.

8. Décomposer $\frac{f(x)}{(x^2+1)^n}$

R. C'est un cas particulier de l'exercice précédent.

9. Démontrer la formule

$$\frac{f(x)}{x^m-1} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\alpha_k f(\alpha_k)}{x-\alpha_k}.$$

$$\alpha_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi k}{m} \qquad (k=0,1,2,\cdots m-1)$$

On suppose le degré de $f(x)$ inférieur à m.

CHAPITRE III.

Fonctions de plusieurs variables.

§ 1. Dérivées partielles et différentielles partielles ou totales des fonctions de deux variables.

110. Dérivées partielles. — Soit $u = f(x, y)$ une fonction continue de deux variables indépendantes x et y. Si l'on attribue à y une valeur constante et qu'on fasse varier x, u devient une fonction continue de x seul. Si elle admet une dérivée, celle-ci se nomme la *dérivée partielle de u par rapport à x*. Cette dérivée partielle est ainsi, par définition, la limite du rapport

$$\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

quand Δx tend vers 0. On la représente indifféremment par l'une ou l'autre des notations suivantes :

$$f'_x(x, y), \qquad D_x f(x, y) \text{ ou } D_x u, \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \text{ ou } \frac{\partial u}{\partial x},$$

De même, en regardant x comme constant et y comme variable, on formera le rapport

$$\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Si celui-ci tend vers une limite quand Δy tend vers zéro, ce sera la *dérivée partielle de u par rapport à y* et on la représentera par les symboles analogues aux précédents :

$$f'_y(x, y) \qquad D_y f(x, y) \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

111. Différentielles partielles. Différentielles totales. — Les *différentielles partielles* $d_x u$, $d_y u$ sont, par définition, égales aux produits

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \qquad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$$

des dérivées partielles par rapport à x et à y par les accroissements Δx et Δy des variables correspondantes.

La différentielle totale du est égale, par définition, à la somme des deux différentielles partielles, de sorte que

$$(1) \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y.$$

En particulier, si $u = x$, on aura

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad dx = \Delta x$$

et, si $u = y$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \qquad \text{d'où} \qquad dy = \Delta y.$$

Donc l'équation (**1**) peut s'écrire aussi sous la forme

$$(2) \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

La comparaison des équations (**1**) et (**2**) appelle une remarque analogue à celle qui a été faite dans le cas des fonctions d'une seule variable (nº 59). L'équation (**2**) a, comme nous le verrons, une généralité que n'avait pas l'équation (**1**). Celle-ci suppose les variables x et y indépendantes, tandis que l'équation (**2**) n'est pas soumise à cette restriction (nº 126).

112. Expression de l'accroissement $\Delta f(x, y)$. — Au moyen des dérivées partielles on obtient une expression importante de l'accroissement d'une fonction $u = f(x, y)$. Supposons que u et ses deux dérivées partielles soient continues à l'intérieur d'un certain domaine D et soit (x, y) un point de ce domaine. Donnons aux variables les accroissements Δx et Δy. On aura

$$\Delta f(x,y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$$
$$= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x,y)]$$

transformons chacune des différences entre crochets par la formule des accroissements finis (nº 69), il viendra, θ et θ_1 étant compris entre 0 et 1,

$$\Delta f(x,y) = \Delta x\, f'_x(x + \theta\Delta x, y + \Delta y) + \Delta y f'_y(x, y + \theta_1\Delta y)$$

D'autre part, les dérivées partielles étant continues au point (x,y), on peut poser

$$f'_x(x + \theta\Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \varepsilon,$$
$$f'_y(x, y + \theta_1\Delta y) = f'_y(x, y) + \varepsilon_1,$$

ε et ε_1 désignant des quantités qui ont pour limite 0 quand Δx et Δy tendent vers zéro. La substitution de ces valeurs donnera

$$\Delta f(x,y) = f'_x(x,y)\,\Delta x + f'_y(x,y)\,\Delta y + \varepsilon\Delta x + \varepsilon_1\Delta y.$$

113 Dérivée et différentielle d'une fonction composée d'une seule variable indépendante. — Supposons que x et y soient deux fonctions d'une variable indépendante unique t, ayant toutes deux des dérivées bien déterminées. Dans ce cas, $f(x,y)$ est une *fonction composée* de t. Pour obtenir sa dérivée, remarquons que la formule du numéro précédent subsiste indépendamment de toute hypothèse sur la nature des accroissements Δx et Δy ; nous pouvons donc admettre qu'ils correspondent à l'accroissement Δt de la variable indépendante. Divisons alors cette formule par Δt ; il vient

$$\frac{\Delta f(x,y)}{\Delta t} = f'_x(x,y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x,y)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_1\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

et, en faisant tendre Δt vers zéro, on trouvera

$$\frac{df(x,y)}{dt} = f'_x(x,y)\frac{dx}{dt} + f'_y(x,y)\frac{dy}{dt},$$

puisque ε et ε_1 ont pour limite 0.

Donc, *si x et y sont des fonctions de t, la dérivée de $f(x,y)$ par rapport à t est la somme des dérivées partielles de $f(x,y)$ par rapport à x et par rapport à y multipliées respectivement par les dérivées de x et de y par rapport à t.* C'est la règle de dérivation des fonctions composées.

En multipliant cette formule par dt, on obtient la différentielle de $f(x,y)$, savoir

$$df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)\,dy.$$

D'où le théorème suivant :

Si x et y sont deux fonctions d'une même variable t, la différentielle de $f(x,y)$ s'exprime au moyen de x,y, dx et dy, par la différentielle totale de $f(x,y)$ comme si les variables x et y étaient indépendantes.

114. *Remarques.* — Le théorème général que nous venons d'énoncer renferme, comme cas particuliers, les règles de dérivation d'une somme, d'un produit et d'un quotient que nous avons démontrées séparément au chapitre Ier (nº 61). On vérifie, en effet, immédiatement que les seconds membres des formules

$$d(u+v) = du + dv, \qquad d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

$$d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

représentent respectivement la somme des différentielles partielles des premiers membres par rapport à u et à v.

115. Sur la manière de calculer les différentielles totales. — Le théorème précédent revient à dire que les différentielles totales se calculent par les mêmes règles que les différentielles des fonctions composées d'une seule variable. Si les différents modes de composition de la fonction $f(x, y)$ sont de ceux qui ont été prévus au chapitre I et c'est ordinairement le cas, il suffira d'appliquer les règles établies dans ce chapitre pour obtenir la différentielle totale.

C'est ainsi que les règles établies pour trouver les différentielles d'une fonction de fonction, d'un quotient et d'une somme (n° 61) conduisent aux résultats suivants :

$$d \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \frac{d\frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

$$d \operatorname{Log} \sqrt{x^2 + y^3} = \frac{d\sqrt{x^2 + y^3}}{\sqrt{x^2 + y^3}} = \frac{2\,x\,dx + 3\,y^2 dy}{2\,(x^2 + y^3)}$$

On voit que les différentielles totales s'obtiennent sans calculer séparément les dérivées partielles et l'on évite ainsi de répéter deux fois certains calculs.

D'autre part, si l'on connaît la différentielle totale de $f(x, y)$, on peut en déduire à simple lecture ses deux dérivées partielles. En effet, dx et dy étant des coefficients indéterminés, la dérivée partielle par rapport à x sera le coefficient de dx et la dérivée partielle par rapport à y celui de dy dans l'expression de la différentielle totale. C'est ainsi que l'on tire immédiatement du calcul fait plus haut :

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

116. Dérivées partielles du second ordre. — Soit $u = f(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes x et y ; ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ seront, en général, des fonctions de x et de y et pourront admettre elles-mêmes des dérivées partielles. Nous désignerons la dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à x par les notations

$$f''_{x^2}(x, y) \quad \text{ou} \quad D^2_{x^2} f \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

et sa dérivée partielle par rapport à y par

$$f''_{xy}(x, y) \quad \text{ou} \quad D^2_{xy}f \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}.$$

De même, les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à x et à y seront respectivement

$$f''_{yx} = D^2_{yx}f = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}, \qquad f''_{yy} = D^2_{yy}f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Mais il existe concernant ces dérivées un théorème fondamental en vertu duquel $f''_{yx} = f''_{xy}$, ce qui réduit à trois seulement le nombre des dérivées partielles du second ordre. Voici ce théorème :

117. **Théorème.** — *Si les deux dérivées partielles f''_{xy}, f''_{yx} sont déterminées et continues dans le voisinage du point (x, y), elles sont nécessairement identiques.*

Posons pour simplifier

$$\varphi(x) = f(x, y + k) - f(x, y)$$
$$\psi(y) = f(x + h, y) - f(x, y)$$

On aura identiquement

$$\varphi(x + h) - \varphi(x) = \psi(y + k) - \psi(y).$$

On a, par la formule des accroissements finis $(0 < \theta < 1)$,

$$\begin{aligned}\varphi(x + h) - \varphi(x) &= h\,\varphi'_x(x + \theta h) \\ &= h\,[f'_x(x + \theta h, y + k) - f'_x(x + \theta h, y)].\end{aligned}$$

On peut encore appliquer la même formule pour transformer la différence entre crochets, ce qui donne $(0 < \theta_1 < 1)$

$$\varphi(x + h) - \varphi(x) = hk\, f''_{xy}(x + \theta h, y + \theta_1 k).$$

On trouve d'une manière analogue

$$\psi(y + k) - \psi(y) = hk\, f''_{yx}(x + \theta' h, y + \theta'_1 k)$$

Donc, les premiers membres de ces deux équations étant égaux,

$$f''_{xy}(x + \theta h, y + \theta_1 k) = f''_{yx}(x + \theta' h, y + \theta'_1 k)$$

Faisons tendre h et k vers zéro, on aura, à la limite,

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Donc, *si les dérivées considérées sont continues, les caractéristiques D_x et D_y peuvent toujours être interverties.*

Les dérivées partielles du second ordre de la fonction $u = f(x, y)$ se réduisent donc en général à trois distinctes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} \text{ ou } \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Cette notation a l'avantage de mettre l'égalité des deux dérivées partielles en évidence et, quand on l'emploie, on suppose toujours implicitement que les conditions de continuité nécessaires pour assurer cette égalité sont remplies.

118. Différentielles partielles du second ordre. — Aux dérivées partielles du second ordre correspondent les différentielles partielles, définies par les équations

$$d_x^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2, \qquad d_x d_y u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} dx dy, \qquad d_y^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$$

L'équation $D_x D_y u = D_y D_x u$ entraîne donc aussi l'égalité

$$d_x d_y u = d_y d_x u,$$

de telle sorte que l'ordre de deux différentiations partielles successives par rapport à x et à y peut aussi être interverti.

119. Dérivées et différentielles partielles d'ordre quelconque. — Le théorème du n° 117 se généralise de lui-même. Concevons que l'on effectue sur une fonction $u = f(x, y)$ un nombre quelconque de dérivations partielles successives, les unes par rapport à x, les autres par rapport à y, dans un ordre arbitraire. Il suit de ce théorème que l'ordre de deux opérations consécutives peut être interverti quand elles se rapportent à deux variables différentes, pourvu que toutes les dérivées que l'on considère restent continues. Moyennant cette restriction, on pourra par la répétition de ces permutations ranger les dérivations dans l'ordre que l'on voudra ; on pourra faire, par exemple, d'abord toutes les dérivations par rapport à x et ensuite toutes celles par rapport à y. De la sorte, le résultat de m dérivations par rapport à x et de n dérivations par rapport à y, opérées consécutivement sur la fonction u, sera le même quel que soit l'ordre suivi et pourra se désigner par un seul et même symbole

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \, \partial y^n}.$$

Cette quantité est une *dérivée partielle* de l'ordre $(m + n)$. En la multipliant par $dx^m dy^n$, on obtient la différentielle partielle du même ordre

$$d_x^m d_y^n u = \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \, \partial y^n} \, dx^m \, dy^n.$$

120. Différentielles totales successives. — Soient $u = f(x, y)$ une

fonction de deux variables x et y, qui peuvent être indépendantes ou non, et

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

sa différentielle totale. Celle-ci est une nouvelle fonction qui peut admettre aussi une différentielle totale $d\,du$. Cette nouvelle différentielle est la *différentielle seconde* d^2u, et ainsi de suite. Le calcul de ces différentielles n'introduit aucune notion nouvelle. Seulement il y a lieu d'observer ce qui suit :

Si x et y sont des variables indépendantes, leurs accroissements $dx = \Delta x$ et $dy = \Delta y$ sont toujours supposés constants quand x et y varient et doivent être traités comme tels dans les différentiations.

Si x et y sont elles-mêmes des fonctions d'autres variables indépendantes, dx et dy sont des fonctions qui ont des différentielles successives d^2x, d^3x,...; d^2y, d^3y,... Dans cette hypothèse, on trouve, en faisant les calculs,

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial u}{\partial x} d^2x + \frac{\partial u}{\partial y} d^2y.$$

Les différentielles totales successives de $f(x, y)$ auront donc des formes différentes suivant qu'on regardera x, y comme des variables indépendantes ou bien comme des fonctions.

Lorsque x et y sont des variables indépendantes ou, plus généralement, lorsque dx et dy peuvent être supposés constants, d^2x et d^2y sont nuls et l'équation précédente devient

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2.$$

Dans ce cas, on peut former une expression symbolique très commode de $d^n u$, en remarquant que, pour former la différentielle totale d'une fonction de x et y, il suffit de la multiplier par le facteur symbolique

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)$$

et d'effectuer les multiplications indiquées par les règles du calcul algébrique. On trouve ainsi, en interprétant les puissances de ∂ comme des indices de dérivation,

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n u.$$

121. Méthode pratique de calcul. — Pratiquement les différentielles totales se calculent non par l'addition des différentielles partielles mais

par la simple application des règles générales du chapitre I. Le calcul est même si simple qu'il y a souvent avantage à se servir de ces différentielles pour calculer les dérivées partielles de u. On traite alors x et y comme des variables indépendantes dont les différentielles dx et dy sont des constantes arbitraires. On obtient ainsi des résultats de la forme

$$du = pdx + qdy, \qquad d^2u = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2, \ldots$$

où p, q, r, s, t sont des fonctions explicites de x et y. La comparaison avec les formules générales montre que l'on aura, puisque dx et dy sont des indéterminées,

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \; q = \frac{\partial u}{\partial y}, \; r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}, \; t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ldots$$

Cette méthode de calcul est surtout avantageuse lorsque l'on doit connaître en même temps toutes les dérivées partielles d'un même ordre. C'est généralement le cas dans les applications géométriques.

§ 2. Extension à un nombre quelconque de variables.

122. Définitions des dérivées et des différentielles premières. — Soit $u = f(x, y, z, \ldots)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes ; la *dérivée partielle* de u par rapport à l'une d'elles, x par exemple, est la dérivée de u considérée comme fonction de x seul, toutes les autres variables étant traitées comme des constantes. On la représente par les symboles

$$\frac{\partial u}{\partial x} \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'_x(x, y, z, \ldots), \quad D_x f(x, y, z, \ldots).$$

Les différentielles partielles $d_x u$, $d_y u \ldots$ s'obtiennent en multipliant les dérivées partielles par les accroissements Δx, $\Delta y, \ldots$ des variables correspondantes, de sorte que

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x, \qquad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y, \ldots$$

La différentielle totale du est la somme des différentielles partielles

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \cdots$$

En particulier, pour $u = x$, pour $u = y, \ldots$ on a respectivement

$$dx = \Delta x, \qquad dy = \Delta y, \ldots$$

et l'équation précédente peut s'écrire sous une nouvelle forme

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \cdots$$

Cette nouvelle forme a sur la première l'avantage d'une plus grande généralité comme nous le montrerons tout à l'heure (n° 126).

123. Accroissement d'une fonction. — La formule du n° 112 se généralise d'elle-même. Soit u une fonction continue ainsi que ses dérivées partielles dans le voisinage d'un point $x, y, z, \ldots$ On aura, en donnant à $x, y, z, \ldots$ les accroissements $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$,

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \cdots + \varepsilon \Delta x + \varepsilon_1 \Delta y + \cdots,$$

$\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots$ désignant des quantités qui tendent vers zéro en même temps que les accroissements Δ.

124. Dérivée et différentielle d'une fonction de fonctions d'une seule variable indépendante. — Si $u = f(x, y, \ldots)$ et si $x, y, \ldots$ sont des fonctions d'une seule variable t, la dérivée de u s'obtient comme au n° 113. On a

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \cdots$$

Donc *la dérivée de $f(x, y \ldots)$ par rapport à t est la somme de ses dérivées partielles par rapport à $x, y, \ldots$, multipliées respectivement par les dérivées de $x, y, \ldots$ par rapport à t.*

Ce principe porte le nom de *règle de dérivation des fonctions composées.*

En multipliant l'équation par dt, il vient ensuite

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \cdots$$

Donc, *si $x, y, \ldots$ sont des fonctions d'une seule variable indépendante t, la différentielle de $f(x, y, \ldots)$ s'exprime au moyen de $x, y, \ldots dx, dy, \ldots$ comme si les variables $x, y, \ldots$ étaient indépendantes.*

125. Dérivées partielles d'une fonction de fonctions de plusieurs variables indépendantes. — Soit $u = f(x, y, z, \ldots)$ une fonction des variables $x, y, z, \ldots$, celles-ci étant elles-mêmes des fonctions d'autres variables indépendantes $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ La dérivée partielle de u par rapport à ξ se calcule par la règle établie au numéro précédent pour les fonctions de fonctions d'une seule variable, ce qui donne

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \cdots$$

On trouve de même

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \cdots$$

et ainsi de suite.

126. Différentielle totale d'une fonction composée. — La différentielle totale de la fonction u du numéro précédent est la somme de ses différentielles partielles par rapport à chacune des variables indépendantes ξ, η, ζ,..., savoir

$$du = \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta + \cdots$$

Remplaçons dans cette expression les dérivées partielles par leurs valeurs trouvées au numéro précédent et réunissons les termes en $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \cdots$ Il vient

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \cdots\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \cdots\right) + \cdots$$

Ces parenthèses sont, par définition, les différentielles totales dx, dy, ... On a donc finalement

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \cdots$$

De là la règle suivante qui généralise celle du n° 113.

La différentielle totale $df(x, y, \ldots)$ s'exprime toujours de la même manière au moyen de $x, y, \ldots dx, dy, \ldots$ que les variables $x, y, \ldots$ soient indépendantes ou qu'elles ne le soient pas.

127. Conditions qui expriment qu'une fonction se réduit à une constante. — Soient x, y, ... des variables indépendantes, la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x, y, \ldots)$ ne dépende pas de x est que l'on ait (n° 70)

$$f'_x(x, y, \ldots) = 0.$$

De même, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle ne dépende pas de y sera

$$f'_y(x, y, \ldots) = 0$$

et ainsi de suite.

Si $f(x, y, \ldots)$ est une constante, cette fonction ne dépend d'aucune des variables et toutes les conditions précédentes sont vérifiées simultanément. On peut les réunir en une seule

$$df(x, y, \ldots) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \cdots = 0,$$

qui entraîne toutes les précédentes, puisque les différentielles dx, dy, ... sont des coefficients arbitraires.

128. Différentiation des équations. — Supposons maintenant que l'on ait une relation

$$f(x, y, \dots) = 0,$$

dans laquelle x, y, ... ne sont plus des variables indépendantes mais des fonctions d'autres variables considérées comme indépendantes ξ, η, ... Le premier membre étant une fonction composée dont la valeur est constante, on aura $df = 0$, ou bien (n° 126)

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \cdots = 0.$$

Différentier totalement une équation, c'est égaler les différentielles totales de ses deux membres. Le résultat que nous venons d'obtenir peut donc se formuler dans le principe suivant, qui est fondamental :

Étant donnée une équation entre un certain nombre de variables, indépendantes ou non, mais ayant des différentielles, il est toujours permis de la différentier totalement.

129. Dérivées et différentielles successives. — Les considérations émises dans le paragraphe précédent se généralisent d'elles-mêmes et il suffit d'énoncer les résultats.

Si l'on effectue un nombre quelconque de dérivations successives par rapport à des variables différentes x, y, z, ... l'ordre de deux dérivations successives par rapport à deux variables différentes peut toujours être interverti, moyennant l'hypothèse de la continuité des dérivées. De la sorte, le résultat de m dérivations par rapport à x, n dérivations par rapport à y, p dérivations par rapport à z, ... effectuées dans un ordre quelconque sur une fonction $u = f(x, y, z, \dots)$, peut être représenté par le symbole unique

$$\frac{\partial^{m+n+p+\cdots} u}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p \dots}$$

Les différentielles totales successives se calculent en appliquant successivement les règles établies pour calculer les différentielles premières. Dans le cas où les variables x, y, z, ... sont indépendantes, et plus généralement si leurs différentielles dx, dy, ... peuvent être supposées constantes, la différentielle $n^{\text{ième}}$ de $f(x, y, z, \dots)$ pourra se mettre sous la forme symbolique

$$d^n f(x, y, z, \dots) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz + \cdots\right)^{\tilde{n}} f.$$

130. Théorème d'Euler sur les fonctions homogènes. — Une fonction $f(x, y, z, \ldots)$ est dite *homogène* par rapport aux variables $x, y, z, \ldots$, lorsque cette fonction vérifie l'identité

$$(1) \qquad f(tx, ty, tz, \ldots) = t^m f(x, y, z, \ldots),$$

t désignant une indéterminée quelconque. L'exposant m est dit le *degré d'homogénéité* de la fonction.

Si l'on fait $t = \frac{1}{x}$, l'identité deviendra

$$f(x, y, z, \ldots) = x^m f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right),$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad f(x, y, z, \ldots) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right)$$

Donc, si l'on divise une fonction homogène de degré m par la $m^{\text{ième}}$ puissance de l'une des variables, elle ne dépendra plus que des seuls rapports des variables deux à deux.

On s'assure aussi immédiatement qu'une fonction qui vérifie la condition (2) vérifie la condition (1). Donc l'équation (2) peut aussi servir de définition des fonctions homogènes.

Différentions l'équation (1) par rapport à t, il viendra identiquement

$$xf'_x(tx, ty, \cdots) + yf'_y(tx, ty, \cdots) + \cdots = mt^{m-1} f(x, y, \cdots)$$

ou, en faisant $t = 1$,

$$(3) \qquad xf'_x(x, y, \cdots) + yf'_y(x, y, \cdots) + \cdots = mf(x, y, \cdots)$$

C'est dans cette identité que consiste le théorème d'Euler : *La somme des produits des dérivées partielles d'une fonction homogène par les variables correspondantes est égale à la fonction elle-même multipliée par le degré d'homogénéité.*

Plus généralement, si l'on différentiait l'équation (1) n fois de suite par rapport à t avant de faire $t = 1$, on trouverait, en se servant de la formule symbolique du numéro précédent,

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \cdots\right)^n f(x, y, \cdots) = m(m-1)\cdots(m-n+1) f(x, y, \cdots)$$

Exercices.

1. Dérivées partielles et différentielles totales successives des fonctions :

$$(x^3 - 2y)^2 + \sqrt{xy}; \quad \frac{x^2 y}{a^2 - z^2}; \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \frac{x^2 y^2}{z^2 + t^2}.$$

2. Dérivées partielles d'ordre quelconque de $f(ax + by + c)$

$$\text{R.} \quad \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \, \partial y^n} = a^m b^n f^{(m+n)}(ax + by + c)$$

3. Appliquer le calcul de l'exercice précédent en supposant que $f(u)$ soit une des fonctions :

$$e^u, \quad \sin u, \quad \cos u, \quad \operatorname{Log} u, \text{ etc...}$$

4. Différentielle $n^{\text{ième}}$ de $u = e^{ax} f(y)$.

R. On applique la formule symbolique du n° 120. On trouve, en interprétant les puissances de f comme des indices de dérivation,

$$d^n e^{ax} f(y) = e^{ax} [f(y)\, dy + a\, dx]^n$$

5. Appliquer ce résultat à la fonction $e^{ax} \cos by$.

6. Différentielle totale $n^{\text{ième}}$ de $u = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$.

R. Différentions une première fois ; il viendra

$$du = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2i}\left[\frac{dx + idy}{x + yi} - \frac{dx - idy}{x - yi}\right]$$

puis, en différentiant encore $(n - 1)$ fois,

$$d^n u = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{2i}\left[\frac{(dx + idy)^n}{(x + yi)^n} - \frac{(dx - idy)^n}{(x - yi)^n}\right].$$

Pour se débarrasser des imaginaires, on pose

$x + yi = r(\cos\theta + i \sin\theta) \qquad dx + i\,dy = ds\,(\cos\varphi + i \sin\varphi).$

On a alors

$$d^n u = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{ds}{r}\right)^n \sin n(\varphi - \theta).$$

On peut aussi calculer d'une manière analogue les dérivées partielles.

7. Différentielle totale $n^{\text{ième}}$ de $u = \operatorname{Log}\sqrt{x^2 + y^2}$.

R. On trouve d'abord

$$du = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{dx + i\,dy}{x + yi} + \frac{dx - i\,dy}{x - yi}\right]$$

On trouvera, par les substitutions de l'exercice précédent,

$$d^n u = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{ds}{r}\right)^n \cos n(\varphi - \theta).$$

Remarque. Les résultats des exercices 6 et 7 dérivent immédiatement du calcul de $d^n \operatorname{Log} z$ dans la théorie des fonctions d'une variable complexe.

8. *Si, dans le voisinage du point (x, y), la fonction $f(x, y)$ admet des dérivées partielles f'_x et f'_y et si f''_{xy} est continue, l'autre dérivée, f''_{yx}, existera aussi et sera identique à f''_{xy}.*

R. Dans cette hypothèse plus restreinte, le raisonnement du n° 117 subsiste jusqu'à la formule

$$\varphi(x + h) - \varphi(x) = hk\, f''_{xy}(x + \theta h, y + \theta_1 k).$$

Divisant par k et faisant tendre k vers zéro, il vient, par la définition de φ dans le premier membre, et par la continuité de f'' dans le second,

$$f'_y(x+h) - f'_y(x) = h f''_{xy}(x+\theta h, y)$$

Divisons par h et faisons tendre h vers 0, le premier membre aura pour limite f''_{yx} et le second f''_{xy}, de sorte que nous obtiendrons la démonstration du théorème.

9. *Si $f'_x(x+h, y, z, \cdots)$ tend vers une limite déterminée quand h tend vers zéro, on aura toujours*

$$f'_x(x, y, z, \cdots) = \lim f'_x(x+h, y, z, \cdots).$$

R. Ce théorème se démontre immédiatement en faisant tendre h vers zéro dans la relation

$$\frac{f(x+h, y, z, \cdots) - f(x, y, z, \cdots)}{h} = f'_x(x+\theta h, y, z, \cdots)$$

C'est donc une propriété de la dérivée des fonctions d'une seule variable.

10. *Si le point $x, y, \cdots$ est un point de discontinuité isolé de la dérivée seconde $f''_{xy}(x, y, \cdots)$, c'est-à-dire s'il n'y a pas d'autre point de discontinuité dans un domaine suffisamment petit enveloppant ce point, on aura, pourvu que ces limites existent,*

$$f''_{xy}(x, y, \cdots) = \lim_{k=0} f''_{xy}(x, y+k, \cdots) = \lim_{k=0} f''_{yx}(x, y+k, \cdots)$$

$$f''_{yx}(x, y, \cdots) = \lim_{h=0} f''_{yx}(x+h, y, \cdots) = \lim_{h=0} f''_{xy}(x+h, y, \cdots).$$

R. C'est l'application du théorème précédent.

11. Déterminer, en appliquant le principe précédent, les dérivées partielles du second ordre au point $x = y = 0$ de la fonction.

$$f(x, y) = x^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} \cdot$$

R. On trouve en général

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \cdot$$

On en conclut

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{x=0} f''_{xy}(x, 0) = 1$$

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{y=0} f''_{xy}(0, y) = -1.$$

12. Déterminer les dérivées partielles à l'origine de

$$f(x, y, z) = (x+z)^2 \operatorname{arctg} \frac{y-z}{x+z} - (y-z)^2 \operatorname{arctg} \frac{x+z}{y-z}$$

13. Déterminer directement les dérivées partielles des deux exercices précédents en recourant à la définition générale de la dérivée.

§ 3. Extension de la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables.

131. Objet de la formule de Taylor. — Considérons une fonction $f(x, y, \ldots)$ de plusieurs variables. Cette formule a pour but de développer la différence $f(a + h, b + k, \cdots) - f(a, b, \cdots)$ sous la forme suivante :

$$(1) \quad f(a + h, b + k, \cdots) - f(a, b, \cdots) = T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-1} + r^n M,$$

où l'on désigne par $T_1, T_2, \cdots T_{n-1}$ des polynômes homogènes et de degrés respectifs $1, 2, \cdots (n - 1)$ par rapport aux accroissements $h, k, \cdots$ des variables et par M une fonction de ces accroissements qui conserve une valeur finie quand la quantité

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 + \cdots}$$

tend vers zéro.

On emploie souvent la formule de Taylor dans l'hypothèse où $h, k, \cdots$ et, par suite, r ont pour limite zéro. Dans ce cas, r étant choisi comme infiniment petit principal (nº 17), les termes successifs de la formule seront généralement des infiniment petits d'ordres successifs 1, 2, 3, etc.

Le problème de trouver ce développement se ramène facilement à celui qui a été résolu pour les fonctions d'une seule variable. Pour abréger l'écriture, nous considérons seulement dans les démonstrations une fonction de deux variables.

132. Formule de Taylor. — Soit $u = f(x, y)$ une fonction dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre n sont bien déterminées pour toutes les valeurs de x entre a et $a + h$ et toutes celles de y entre b et $b + k$. Soit ensuite t une nouvelle variable indépendante ; posons

$$(2) \quad \begin{cases} x = a + ht, \\ y = b + kt, \end{cases} \quad \text{d'où } u = f(x, y) = \varphi(t).$$

De la sorte, u est une fonction composée de t dont les dérivées seront bien déterminées jusqu'à l'ordre n inclusivement dans l'intervalle (0, 1). Si l'on donne à t, entre ces limites, un accroissement $\Delta t = dt$, l'accroissement correspondant Δu de la fonction sera donné par la formule de Taylor (nº 87) et il viendra

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta u = du + \frac{d^2u}{2!} + \cdots + \frac{d^{n-1}u}{(n-1)!} + \left[\frac{d^n u}{n!}\right]_{t+\theta dt} \\ &\qquad\qquad (0 < \theta < 1). \end{aligned} \right.$$

Les différentielles $dx = hdt$ et $dy = kdt$ étant constantes, les différentielles successives de $f(x, y)$ se calculent par la formule symbolique du nº (120) et l'on a

$$(4)\qquad d^p u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^p f(x, y).$$

Posons $t = 0$ et $dt = 1$; il viendra par les formules (**2**) :

$$x = a, \quad y = b, \quad dx = h, \quad dy = k.$$

On aura d'autre part,

$$\Delta u = f(a + h, b + k) - f(a, b)$$

et la formule (**4**) prendra la forme

$$d^p u = \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^p f(a, b).$$

Portons ces valeurs dans l'équation (**3**), nous trouverons la *formule de Taylor :*

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a, b) = {} & \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right) f(a, b) \\ & + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^2 f(a, b) + \cdots \\ & + \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{n-1} f(a, b) \\ & + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^n f(a + \theta h, b + \theta k) \end{aligned} \right.$$

133. Remarques. — 1° Cette formule résout la question proposée et ce développement satisfait à la condition que nous avons indiquée au nº 131, pourvu que toutes les dérivées partielles de l'ordre n soient bornées. En effet, on peut alors désigner par M la limite supérieure de la somme des valeurs absolues de ces dérivées quand x et y varient respectivement entre a et $a + h$, b et $b + k$. Alors la valeur absolue du dernier terme ne peut surpasser la quantité

$$r^n \mathrm{M},$$

puisque $|h|$ et $|k|$ ne peuvent surpasser r. On voit donc que le rapport de ce terme à r^n conserve toujours une valeur finie.

2° La formule de Taylor est la seule qui jouisse des propriétés indiquées, car deux développements jouissant de ces propriétés doivent être identiques terme pour terme.

En effet, si l'on change h en ht et k en kt dans la formule (**1**), on aura, quel que soit t,

$$f(a + ht, b + kt) - f(a, b) = t\mathrm{T}_1 + \cdots + t^{n-1}\,\mathrm{T}_{n-1} + t^n r^n \mathrm{M}.$$

Or, d'après la démonstration faite pour une seule variable, deux développements de cette forme ne peuvent être égaux pour toute valeur de t que si T_1, T_2,.... ont les mêmes valeurs, ce qui n'a lieu pour toutes les valeurs de h et k que si les polynômes T_1, T_2,... sont identiques.

134. Autre forme de la formule de Taylor. — Lorsque x et y sont des variables indépendantes, on peut écrire $h = dx$, $k = dy$; si l'on remplace alors a par x et b par y dans la formule (**5**), le résultat pourra se mettre sous la forme

$$\Delta f(x, y) = df + \frac{d^2 f}{2\,!} + \cdots + \frac{d^{n-1} f}{(n-1)\,!} + \left[\frac{d^n f}{n\,!}\right]_{x + \theta dx,\; y + \theta dy}$$

$$(0 < \theta < 1)$$

seulement, ces différentielles sont maintenant des différentielles totales. La notation employée pour le dernier terme signifie qu'il faut remplacer, dans les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ qui entrent dans ce terme, x par $x + \theta\, dx$ et y par $y + \theta\, dy$.

135. Formule de Maclaurin. — Celle-ci se déduit de la formule (**5**) en y faisant $a = b = 0$, $h = x$ et $k = y$. Nous écrivons le résultat comme il suit :

$$f(x, y) = f(0, 0) + \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) f_{0,0} + \frac{1}{2\,!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f_{0,0} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{(n-1)\,!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f_{0,0} + \frac{1}{n\,!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f_{\theta x, \theta y}$$

Ces indices signifient qu'après avoir effectué le calcul de toutes les dérivées partielles, il faut remplacer dans ces dérivées x et y par 0. Par la formule de Maclaurin on développe donc la fonction en une somme de termes homogènes et de degrés croissants par rapport à x et à y.

136. Ces résultats s'étendent d'eux-mêmes aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. On aura ainsi, pour trois variables,

$$f(a + h, b + k, c + l) = f(a, b, c) + \frac{1}{1}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b} + l\frac{\partial}{\partial c}\right) f(a, b, c)$$
$$+ \frac{1}{2\,!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b} + l\frac{\partial}{\partial c}\right)^2 f(a, b, c) + \cdots$$

et ainsi de suite.

§ 4. Maxima et minima des fonctions de plusieurs variables.

137. Fonctions de deux variables. — On dit qu'une fonction $f(x, y)$ de deux variables indépendantes est *maximum* ou *minimum* pour un système de valeurs (a, b) de ces variables, lorsque la différence

$$f(a+h, b+k) - f(a, b)$$

garde le même signe pour toutes les valeurs de h et de k inférieures en valeur absolue à un nombre positif ε suffisamment petit. Le maximum correspond au cas où cette différence est négative et le minimum au cas où elle est positive.

Les seuls points où la fonction $f(x, y)$ puisse être maximum ou minimum, sont ceux où chacune de ses deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'annule ou cesse d'exister.

En effet, si l'on pose, en particulier, $k = 0$, la différence

$$f(a+h, b) - f(a, b)$$

devra conserver le même signe quel que soit le signe de h, pourvu que l'on ait $|h| < \varepsilon$, ce qui ne peut avoir lieu, comme on l'a prouvé dans le cas des fonctions d'une seule variable (n° 99), que si $\frac{\partial f}{\partial x}$ s'annule ou cesse d'exister au point (a, b). De même pour l'autre dérivée partielle.

Admettons que les deux dérivées partielles du premier ordre de $f(x, y)$ soient des fonctions continues ; pour trouver les maxima et les minima de $f(x, y)$, il faudra donc poser les deux équations simultanées :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

En résolvant ces équations par rapport à x et à y, on trouvera généralement un certain nombre de solutions. Soit $x = a$, $y = b$ l'un d'eux. Il reste à examiner si la fonction admet réellement un maximum ou un minimum en ce point. Voici la méthode à suivre pour trancher cette question.

138. Supposons que $f(x, y)$ et ses dérivées partielles des deux premiers ordres soient finies et continues au point (a, b). Développons la différence $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ par la formule de Taylor

en nous arrêtant aux termes du second ordre (nº 132). Il viendra, les dérivées premières étant nulles,

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) =$$
$$\frac{1}{2!}\left(h^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial b^2}\right) f(a+\theta h, b+\theta k).$$

Nous pouvons poser

(1) $\quad r = \sqrt{h^2 + k^2}, \qquad h = r \sin\alpha, \qquad k = r\cos\alpha,$

de sorte que r est une quantité infiniment petite et α un angle arbitraire avec h et k. Ecrivons encore, en abrégé,

(2) $\quad A = \dfrac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a^2}, \qquad B = \dfrac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a \partial b}, \qquad C = \dfrac{\partial^2 f(a, b)}{\partial b^2}$

et désignons par η une quantité infiniment petite avec r. Les dérivées partielles étant continues au point (a, b), le développement précédent peut se mettre sous la forme

(3) $\quad f(a+h, b+k) - f(a, b) =$
$$\frac{r^2}{2!}(A \sin^2\alpha + 2\,B \sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha + \eta).$$

La considération de cette équation conduit aux conclusions suivantes :

1º) Si le trinôme

$$A \sin^2\alpha + 2\,B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$$

ne peut s'annuler, comme il est fonction continue de α, il conservera un signe invariable et sa valeur absolue restera supérieure à un nombre positif m. C'est donc ce trinôme qui donnera son signe au second membre de l'équation (3), dès que l'on aura $|\eta| < m$, donc à partir d'une valeur suffisamment petite de r, quel que soit α. Il y aura maximum ou minimum selon que le trinôme sera négatif ou positif.

2º) Si le trinôme peut changer de signe, comme il donnera encore son signe au second membre de l'équation (3), pour chaque valeur de α qui ne l'annule pas, à partir d'une valeur suffisamment petite de r, il n'y aura ni maximum ni minimum.

3º) Enfin, si le trinôme, sans pouvoir changer de signe, peut cependant s'annuler pour certaines valeurs de α, pour ces valeurs, le signe du second membre de l'équation (3) dépend de celui de η qui reste inconnu et l'on ne peut rien conclure.

Les caractères analytiques particuliers à ces trois cas sont faciles à indiquer :

Supposons A différent de zéro. Le trinôme peut se mettre sous forme de fraction, comme il suit :

$$\frac{(A \sin \alpha + B \cos \alpha)^2 + (AC - B^2) \cos^2 \alpha}{A}.$$

1°) Si $AC - B^2 > 0$, le numérateur de cette fraction est une somme de deux carrés qui ne peuvent s'annuler ensemble et il est toujours positif. Donc le trinôme ne peut s'annuler et a le signe de A. Il y a maximum si $A < 0$ et minimum si $A > 0$.

2°) Si $AC - B^2 < 0$, le numérateur aura des signes différents dans les hypothèses $\cos \alpha = 0$ et $\operatorname{tg} \alpha = - B : A$. Donc le trinôme peut changer de signe et il n'y a ni maximum ni minimum.

3°) Si $AC - B^2 = 0$, le numérateur se réduit à un seul carré, le trinôme, sans changer de signe, peut s'annuler. C'est le cas douteux.

Supposons encore que A soit nul. Le trinôme se réduit à

$$\cos \alpha \, (2 B \sin \alpha + C \cos \alpha).$$

Si B n'est pas nul, cette expression changera de signe avec $\cos \alpha$ supposé infiniment petit, et il n'y a ni maximum ni minimum.

Enfin, si A et B sont nuls tous deux, le trinôme se réduit à $C \cos^2 \alpha$, qui peut s'annuler mais ne peut changer de signe. C'est encore une fois le cas douteux.

139. *Remarque*. — C'est uniquement pour rendre la discussion plus claire qu'on a remplacé h et k par $r \sin \alpha$ et $r \cos \alpha$, mais cette substitution n'est pas nécessaire. Le raisonnement peut se faire directement sur l'ensemble des termes du second ordre dans la formule de Taylor, c'est-à-dire sur le trinôme

$$A h^2 + 2 B hk + C k^2$$

et les résultats obtenus peuvent se résumer comme il suit :

1° Il n'y aura ni maximum ni minimum, si les racines de ce trinôme sont réelles et inégales.

2° Il y aura maximum ou minimum, si les racines sont imaginaires : maximum si A est < 0, minimum si A est > 0.

3° Doute, si les racines sont égales.

Pour trancher le cas douteux il faut faire intervenir les termes suivants de la formule de Taylor, mais cette discussion générale est assez difficile et ne peut trouver place ici.

140. Fonctions de plusieurs variables. — Une méthode semblable

s'applique aux fonctions de trois et d'un plus grand nombre de variables. Pour que $f(x, y, z)$ devienne maximum ou minimum au point (a, b, c) il faudra (en laissant de côté le cas de discontinuité) que ses trois dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z, s'annulent en ce point, ou, ce qui revient au même, que sa différentielle totale df soit identiquement nulle. En exprimant que ces conditions sont satisfaites, on obtient un système d'équations simultanées dont les solutions peuvent fournir des maxima et des minima. Pour s'en assurer, on remplacera x, y, z par $a + h, b + k, c + l$ et l'on calculera d^2f, c'est-à-dire l'ensemble des termes du 2e ordre en h, k, l. Ce sera un polynôme homogène du second degré, qui devra avoir un signe unique. On le transformera donc en une somme algébrique de carrés : 1° Si tous ces carrés ne sont pas de même signe, il n'y aura ni maximum ni minimum ; 2° s'ils sont tous de même signe, il y aura minimum s'ils sont positifs et maximum s'ils sont négatifs, pourvu qu'ils ne puissent s'annuler en même temps que pour $h = k = l = 0$; 3° dans le doute, c'est-à-dire si tous les carrés sont de même signe mais peuvent s'annuler ensemble, il faudra faire intervenir l'ensemble des termes du troisième ou du quatrième ordre, et ainsi de suite.

141. Problème. — *Trouver la plus courte distance de deux droites* A *et* B *de l'espace.*

Soient a_1, a_2, a_3 les coordonnées d'un point a de la droite A et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les cosinus directeurs de cette droite ; les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de cette même droite peuvent s'exprimer au moyen d'une variable indépendante u par les formules :

$$\text{(A)} \qquad \frac{x - a_1}{\alpha_1} = \frac{y - a_2}{\alpha_2} = \frac{z - a_3}{\alpha_3} = u.$$

De même, les coordonnées ξ, η, ζ d'un point quelconque de la droite B s'exprimeront en fonction d'une seconde variable indépendante v par les formules :

$$\text{(B)} \qquad \frac{\xi - b_1}{\beta_1} = \frac{\eta - b_2}{\beta_2} = \frac{\zeta - b_3}{\beta_3} = v,$$

où b_1, b_2, b_3 sont les coordonnées d'un point b et $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ les cosinus directeurs de la droite B.

Soit δ la distance de deux points (x, y, z) et (ξ, η, ζ) pris sur chacune des droites A et B. On aura

$$\text{(1)} \qquad \delta^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$$

C'est une fonction de u et de v en vertu des équations (A) et (B) et il faut en chercher le minimum. Pour cela, il faut annuler ses deux dérivées partielles. En se servant des relations

$$(2)\quad \begin{cases} \xi - x = \beta_1 v - \alpha_1 u + (b_1 - a_1), \\ \eta - y = \beta_2 v - \alpha_2 u + (b_2 - a_2), \\ \zeta - z = \beta_3 v - \alpha_3 u + (b_3 - a_3), \end{cases}$$

et en appliquant la règle de dérivation des fonctions de fonctions, on trouve ainsi

$$(3)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\frac{\partial\delta^2}{\partial u} = (\xi - x)\,\alpha_1 + (\eta - y)\,\alpha_2 + (\zeta - z)\,\alpha_3 = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\delta^2}{\partial v} = (\xi - x)\,\beta_1 + (\eta - y)\,\beta_2 + (\zeta - z)\,\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont susceptibles d'une interprétation géométrique immédiate. En effet, désignons par τ_1, τ_2, τ_3 les cosinus directeurs de la plus courte distance δ des deux droites ; on aura

$$(4)\qquad \xi - x = \delta\tau_1 \quad \eta - y = \delta\tau_2, \quad \zeta - z = \delta\tau_3$$

et les équations (3) peuvent s'écrire

$$(5)\quad \begin{cases} \tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2 + \tau_3\alpha_3 = 0, \\ \tau_1\beta_1 + \tau_2\beta_2 + \tau_3\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Elles expriment donc que la plus courte distance est une perpendiculaire commune aux deux droites A et B. Les cosinus directeurs de la plus courte distance sont fournis par ces dernières équations. En effet, si l'on pose, en abrégé,

$$(6)\quad T_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \quad T_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \quad T_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1,$$

il vient

$$(7)\qquad \frac{\tau_1}{T_1} = \frac{\tau_2}{T_2} = \frac{\tau_3}{T_3} = \frac{1}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2}}.$$

La valeur de la plus courte distance elle-même s'en déduit aussi ; car, en additionnant les équations (4), multipliées respectivement par τ_1, τ_2, τ_3, il vient

$$\delta = \tau_1(\xi - x) + \tau_2(\eta - y) + \tau_3(\zeta - z)\,;$$

puis, en remplaçant les parenthèses par leurs valeurs (2) et en tenant compte des équations (5), on trouve

$$(8)\qquad \delta = \tau_1(b_1 - a_1) + \tau_2(b_2 - a_2) + \tau_3(b_3 - a_3) = \frac{T_1(b_1 - a_1) + T_2(b_2 - a_2) + T_3(b_3 - a_3)}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2}}.$$

Enfin, il reste encore à trouver les valeurs de u et de v correspondant aux extrémités de la plus courte distance. Pour cela, on remplace dans les équations (3) les parenthèses par leurs valeurs (2) et l'on trouve, par les propriétés des cosinus directeurs d'une droite, les deux équations suivantes :

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \delta^2}{\partial u} = u - v\cos(A,B) - p = 0, \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \delta^2}{\partial v} = u\cos(A,B) - v - q = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé, en abrégé,

$$\begin{cases} p = (b_1 - a_1)\,\alpha_1 + (b_2 - a_2)\,\alpha_2 + (b_3 - a_3)\,\alpha_3 \\ q = (b_1 - a_1)\,\beta_1 + (b_2 - a_2)\,\beta_2 + (b_3 - a_3)\,\beta_3. \end{cases}$$

On en tire

$$(10)\qquad u = \frac{p - q\cos(A,B)}{\sin^2(A,B)}, \qquad v = \frac{p\cos(A,B) - q}{\sin^2(A,B)},$$

ce qui achève la solution du problème.

Remarque. — On vérifie facilement que la solution précédente satisfait aux conditions analytiques d'un minimum. En effet, on tire des équations (9)

$$\frac{\partial^2\delta^2}{\partial u^2} = 2, \quad \frac{\partial^2\delta^2}{\partial u\partial v} = 2\cos(A,B), \quad \frac{\partial^2\delta^2}{\partial v^2} = 2$$

Donc la quantité représentée par AC — B^2 dans la théorie générale est égale à $4\sin^2(A, B)$. Elle est positive et il y a minimum parce que la quantité A est positive.

Exercices.

1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.
R. Une solution : $x = 3$, $y = 3$ (minimum).

2. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.
R. Trois solutions : $x = +\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ (minimum) ; $x = -\sqrt{2}$, $y = +\sqrt{2}$ (minimum) ; $x = 0$, $y = 0$ (ni maximum ni minimum).

3. $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$.
R. Une solution : $x = 0, y = 0$ (cas douteux). Comme la fonction peut se mettre sous la forme $(x - y^2)^2 - y^5$, on voit facilement qu'il n'y a ni maximum ni minimum.

On remarquera que cependant la fonction d'une seule variable $\varphi(t) = f(ht, kt)$ est maximum pour $t = 0$ quels que soient les coefficients h et k. Cet exemple prouve donc, contrairement à l'affirmation de certains auteurs, que l'existence d'un maximum ou d'un minimum de $f(a + ht, b + kt)$ pour $t = 0$ quels que soient k et k, n'entraine pas l'existence d'un maximum ou d'un minimum de $f(x, y)$ au point (a, b).

4. Etant donné un triangle, trouver dans le plan du triangle un point O tel, que la somme des carrés de ses distances aux trois sommets soit un minimum.

R. Soient (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) les coordonnées rectangulaires des trois sommets, (x, y) celles du point O. On trouve

$$3x = a_1 + a_2 + a_3, \qquad 3y = b_1 + b_2 + b_3.$$

Le point O est le centre de gravité du triangle.

5. Etant donné un triangle, trouver dans le plan de ce triangle un point O tel, que la somme de ses distances aux trois sommets soit un minimum.

R. Conservant les notations précédentes, il faut rendre minimum la fonction

$$f(x, y) = \Sigma \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Soient r_1, r_2, r_3 les droites joignant le point O aux trois sommets et θ_1, θ_2, θ_3 leurs angles avec l'axe des x. On a, si les dérivées partielles s'annulent,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 0.$$

L'axe des x étant quelconque, on en conclut que les trois droites r_1, r_2, r_3 font entre elles le même angle. Le minimum a lieu au point où les trois côtés du triangle sont vus sous le même angle (120°). Ce point est facile à construire si les trois angles du triangle sont $< 120°$. Mais si l'un des angles, A par exemple, est $> 120°$, ce point n'existe plus. On montrera que, dans ce cas, le minimum a lieu quand le point O vient coïncider avec le sommet A du triangle. C'est un exemple remarquable où le minimum correspond à un point de discontinuité des dérivées partielles.

CHAPITRE IV.

Fonctions implicites. Changement de variables.

§ 1. Théorèmes d'existence.

Les fonctions implicites sont celles qui sont définies par des équations non résolues. Nous commencerons par démontrer les théorèmes fondamentaux sur les conditions d'existence de ces fonctions.

142. Théorème I. — *Soit* F (x, y) *une fonction de deux variables* x, y. *Supposons : 1° qu'elle s'annule au point* x_0, y_0 ; *2° qu'elle admette des dérivées partielles du premier ordre finies et continues dans le voisinage de ce point ; 3° que* F'_y *ne s'annule pas en ce point. Je dis qu'il existe une fonction* $y = \varphi(x)$ *qui se réduit à* y_0 *pour* $x = x_0$ *et qui, dans le voisinage de cette valeur* x_0, *satisfait identiquement à l'équation*

$$F(x, y) = 0.$$

Cette fonction est unique et elle a pour dérivée $\varphi'(x) = - F'_x : F'_y$.

D'après les hypothèses du théorème, on peut d'abord déterminer trois nombres positifs A, B et δ tels qu'on ait

$$| F'_x | < A, \qquad | F'_y | > B,$$

sous les conditions

$$| x - x_0 | < \delta, \qquad | y - y_0 | < \delta.$$

Ceci posé, donnons à x une valeur quelconque, assujettie à vérifier la condition $| x - x_0 | < \delta$ et, en outre, la suivante

$$(1) \qquad A \, | x - x_0 | < B\delta ;$$

je dis qu'il y aura dans l'intervalle $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ une valeur de y et une seule pour laquelle on aura

$$F(x, y) = 0.$$

En effet, si l'on pose en abrégé

$$x - x_0 = h, \qquad y - y_0 = k,$$

on peut appliquer la formule de Taylor bornée à un seul terme, ce qui donne

$$F(x, y) = F(x, y) - F(x_0, y_0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) F(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

Le second membre aura des signes différents pour $k = +\delta$ et pour $k = -\delta$, car, à cause de (1), c'est le second terme qui l'emporte sur le premier et qui donne son signe à la somme. Donc $F(x, y)$ a des signes différents pour $y = y_0 - k$ et $y = y_0 + k$. Mais F est fonction continue de y, elle s'annule donc pour une valeur de y comprise entre ces limites. Elle ne s'annulera d'ailleurs qu'une fois puisque sa dérivée F'_y ne change pas de signe dans cet intervalle.

La suite des valeurs de y qui vérifient l'équation $F(x, y) = 0$ quand x varie dans l'intervalle que nous venons de considérer, constitue donc une fonction finie et bien déterminée de x dans cet intervalle.

Cette fonction admet une dérivée bien déterminée. En effet, soient h et k les accroissements infiniment petits correspondants de x et de y, on aura

$$F(x+h, y+k) - F(x, y) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) F(x+\theta h, y+\theta k) = 0.$$

On en tire

$$\frac{k}{h} = -\frac{F'_x(x+\theta h, y+\theta k)}{F'_y(x+\theta h, y+\theta k)}, \quad \text{d'où} \quad \lim \frac{k}{h} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

143. Théorème II. — *Soit $F(x, y, \dots u)$ une fonction des $(n+1)$ variables $x, y, \dots u$. Supposons : 1° qu'elle s'annule au point $(x_0, y_0, \dots u_0)$; 2° qu'elle admette des dérivées partielles continues dans le voisinage de ce point ; 3° que F'_u ne soit pas nulle en ce point. Je dis qu'il existe une fonction u des n variables $x, y, \dots$ qui satisfait identiquement à l'équation $F = 0$ dans le voisinage du point $(x_0, y_0, \dots)$ et qui se réduit à u_0 en ce point. Cette fonction est unique et elle admet des dérivées partielles.*

Ce théorème se démontre comme le précédent. On peut d'abord déterminer trois nombres positifs A, B et δ tels que toutes les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \cdots$ soient $< A$ en valeur absolue et $\frac{\partial F}{\partial u} > B$ en valeur absolue, tant que toutes les quantités $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, ... $(u - u_0)$ sont $< \delta$ en valeur absolue.

Ceci fait, posons

$$x = x_0 + h, \qquad y = y_0 + k, \dots \qquad u = u_0 + m,$$

et donnons à $x, y, \dots$ un système de valeurs quelconques, mais assujetties à vérifier les conditions $|h| < \delta$, $|k| < \delta$, ... et, en outre,

$$(1) \qquad A[\,|h| + |k| + \dots] < B\delta\ ;$$

je dis qu'il y aura dans l'intervalle $(u_0 - \delta, u_0 + \delta)$ une valeur de u et une seule pour laquelle $F(x, y, \dots u) = 0$. En effet, on a

$$F(x,y,\dots u) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + \dots + m\frac{\partial}{\partial u}\right) F(x_0+\theta h, y_0+\theta k, \dots u_0+\theta m)$$

$< B\delta$

et le second membre aura des signes différents pour $m = +\delta$ et pour $m = -\delta$, car, en vertu de (1), c'est le dernier terme qui donne son signe à la somme. Donc $F(x, y, \dots u)$ s'annule pour une valeur de u comprise entre $u_0 - \delta$ et $u_0 + \delta$ et pour une seule, car F'_u ne change pas de signe dans cet intervalle.

L'ensemble des valeurs de u qui vérifient l'équation $F(x, y, \dots u) = 0$ quand $x, y, \dots$ varient sous les conditions précédentes constitue donc une fonction bien déterminée.

Cette fonction admet aussi des dérivées partielles, car, comme celles-ci s'obtiennent en ne faisant varier qu'une seule des variables $x, y, \dots$, leur existence résulte du théorème précédent, ainsi que leurs valeurs

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_u}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_u}, \quad \text{etc.}$$

144. Théorème III. — *Soient* $F_1, F_2, \dots F_n$ *n fonctions des* $m+n$ *variables* $x, y, \dots, u, v, w, \dots$ *Supposons : 1° que ces fonctions s'annulent au point* $(x_0, y_0, \dots, u_0, v_0, w_0, \dots)$ *; 2° qu'elles admettent des dérivées partielles continues dans le voisinage de ce point ; 3° que le déterminant*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} & \dots \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial w} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u} & \frac{\partial F_n}{\partial v} & \frac{\partial F_n}{\partial w} & \dots \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas en ce même point. Je dis qu'il existe un système de fonctions des m variables indépendantes $x, y, \dots$ *se réduisant à* $u_0, v_0, w_0, \dots$ *au point* $(x_0, y_0, \dots)$ *et qui substituées à la place de* $u, v, w, \dots$ *satisfont identiquement aux équations* $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \dots$ *dans le voisinage de ce point. Enfin, ces fonctions admettent des dérivées partielles.*

Ce théorème se réduit au précédent quand il n'y a qu'une seule équation. Pour l'établir en général, nous pouvons donc admettre qu'il ait déjà été établi pour $n - 1$ équations et montrer qu'il subsiste alors pour n.

Désignons par $J_1, J_2, \dots J_n$ les mineurs relatifs aux éléments de la première colonne de J ; on aura

$$(1) \qquad J = J_1 \frac{\partial F_1}{\partial u} + J_2 \frac{\partial F_2}{\partial u} + \dots + J_n \frac{\partial F_n}{\partial u}.$$

Comme J ne s'annule pas au point $(x_0, y_0, \dots)$, il faut que l'un au moins des mineurs ne s'annule pas en ce point et nous pouvons supposer que ce soit J_1.

Or, le théorème est supposé s'appliquer pour $(n - 1)$ équations. Donc, J_1 étant différent de zéro, il existe un système unique de $(n - 1)$ fonctions :

$$(2) \qquad v = V(x, y, \ldots u), \qquad w = W(x, y, \ldots u), \ldots$$

de $m + 1$ variables indépendantes $x, y, \ldots u$, se réduisant à $v_0, w_0, \ldots$ au point $(x_0, y_0, \ldots)$, admettant des dérivées partielles et satisfaisant identiquement aux $n - 1$ équations

$$(3) \quad F_2(x, y, \ldots u, V, W, \ldots) = 0, \ldots, \quad F_n(x, y, \ldots u, V, W, \ldots) = 0.$$

Si l'on substitue ces fonctions dans la relation $F_1 = 0$ qui reste seule à vérifier, elle devient

$$(4) \qquad F_1(x, y, \ldots u, V, W, \ldots) = \Phi(x, y, \ldots u) = 0.$$

En vertu du théorème II, il existera une fonction u et une seule des m variables $x, y, \ldots$ se réduisant à u_0 au point $x_0, y_0, \ldots$ satisfaisant à l'équation précédente dans le voisinage de ce point et admettant les dérivées partielles, pourvu que $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ ne s'annule pas en ce point. Mais cette condition est réalisée. En effet, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial F_1}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial w}\frac{\partial W}{\partial u} + \cdots$$

Multiplions cette relation par J_1 et ajoutons membre à membre avec les identités ci-dessous, multipliées respectivement par $J_2, J_3, \ldots$, identités qui s'obtiennent en dérivant par rapport à u les relations (3) :

$$0 = \frac{\partial F_2}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial w}\frac{\partial W}{\partial u} + \cdots,$$

$$0 = \frac{\partial F_3}{\partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial w}\frac{\partial W}{\partial u} + \cdots$$

. . . .

Il viendra, par l'équation (1) et les propriétés des mineurs d'un déterminant,

$$J_1 \frac{\partial \Phi}{\partial u} = J \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial u} = J : J_1.$$

Donc, puisque J et J_1 sont différents de zéro, $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ l'est aussi.

Si l'on substitue dans les équations (2) la fonction u dont l'existence vient d'être établie, on obtient pour $u, v, w, \ldots$ un système de fonctions de $x, y, \ldots$ qui satisfont à toutes les conditions requises dans l'énoncé du théorème.

§ 2. Différentiation des fonctions implicites.

145. Les fonctions implicites sont celles qui sont définies par des équations non résolues. Dans le paragraphe précédent, on a indiqué

sous quelles conditions on peut s'assurer de l'existence de ces fonctions et de leurs différentielles du premier ordre. Cette existence une fois admise, la détermination des dérivées et des différentielles des fonctions implicites se fait sans aucune difficulté par l'application des principes généraux.

146. Dérivées et différentielles du 1r ordre. — 1° Considérons d'abord la fonction implicite y d'une seule variable x, définie par une équation unique

$$F(x, y) = 0.$$

Différentions totalement cette équation (n° 128), il vient

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

et l'on en tire, pourvu que F'_y ne soit pas nul,

$$dy = -\frac{F'_x}{F'_y} dx, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y},$$

ce qui fait connaître la dérivée et la différentielle de y au moyen des dérivées partielles de F.

On peut aussi obtenir la dérivée de y sans passer par la différentielle. On observe que $F(x, y)$ est une *fonction composée de x* qui demeure constante quand on y remplace y par sa valeur $\varphi(x)$ tirée de l'équation $F = 0$. Donc sa dérivée sera nulle et il vient par la règle du n° 113

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

équation d'où l'on en tire aussi $\frac{dy}{dx}$. Quand on opère ainsi, on dit souvent que l'on *dérive totalement* l'équation proposée par rapport à x.

2° Soit maintenant u une fonction implicite des variables indépendantes $x, y, \ldots$ définie par l'équation

$$F(x, y, \ldots u) = 0.$$

Différentions totalement cette équation ; il vient

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u} du = 0.$$

On en tire l'expression de la différentielle totale

$$du = -\frac{F'_x dx + F'_y dy + \cdots}{F'_u}.$$

Les dérivées partielles de u sont les coefficients de dx, de dy,... dans cette équation. On a donc, pourvu que F'_u ne soit pas nul,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_u}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_u}, \text{ etc.}$$

D'ailleurs ces valeurs s'obtiennent par le même calcul que dans le premier cas, en considérant toutes les variables indépendantes, sauf une seule, comme des constantes et u comme une fonction d'une seule variable.

3° Considérons maintenant le cas où l'on a m fonctions u, v,... d'une seule variable indépendante x, définies par m équations

$$(1) \qquad \begin{cases} F_i(x, u, v, \ldots) = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots m) \end{cases}$$

On en tire, en différentiant totalement les m équations,

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F_i}{\partial x}\, dx + \dfrac{\partial F_i}{\partial u}\, du + \dfrac{\partial F_i}{\partial v}\, dv + \cdots = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots m) \end{cases}$$

Soit J le déterminant formé avec les coefficients de du, dv,..., savoir

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} & \cdots \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Si ce déterminant n'est pas nul, on tirera des équations (**2**) les valeurs de du, de dv,... sous forme de fractions ayant pour dénominateur commun J. En divisant par dx, on aura les dérivées. D'ailleurs ces dérivées peuvent aussi s'obtenir, sans passer par les différentielles, en *dérivant totalement* les équations (**1**) par rapport à x, ce qui revient à diviser les équations (**2**) par dx.

4° Passons maintenant au cas le plus général. Soient u, v,... m fonctions implicites de n variables indépendantes x, y,..., définies par m équations simultanées

$$(1) \qquad \begin{cases} F_i(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots m) \end{cases}$$

En différentiant totalement ces équations, il vient

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F_i}{\partial x}\, dx + \dfrac{\partial F_i}{\partial y}\, dy + \cdots + \dfrac{\partial F_i}{\partial u}\, du + \dfrac{\partial F_i}{\partial v}\, dv + \cdots = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots m) \end{cases}$$

Soit, comme dans le cas précédent, J le déterminant formé avec les coefficients de du, dv,... dans ces équations. Si ce déterminant n'est pas nul, on peut résoudre les équations (2) par rapport à du, dv,... On obtiendra ces différentielles totales sous forme de fractions ayant J pour dénominateur et dont les numérateurs seront linéaires par rapport à dx, dy,... Les dérivées partielles d'une des fonctions seront respectivement les coefficients de dx, de dy,... dans la différentielle totale de cette fonction. Elles s'expriment donc rationnellement au moyen des dérivées partielles des fonctions F_i par rapport aux variables x, y,... u, v,... et elles ont pour dénominateur commun J. On peut aussi les obtenir directement comme dans le cas précédent, en considérant u, v,... comme des fonctions de x seul, de y seul, etc.

147. Dérivées et différentielles successives. — Les dérivées et les différentielles du deuxième ordre, du troisième, etc... s'obtiennent par l'application des mêmes principes, en différentiant ou en dérivant totalement deux fois, trois fois..., l'équation ou les équations proposées. Aucune notion nouvelle ne s'introduit, mais il faut observer que, dans ces différentiations successives, les différentielles premières des variables indépendantes doivent être traitées comme des constantes, tandis que les différentielles des fonctions sont elles-mêmes des fonctions ayant des différentielles successives que l'on désigne par les caractéristiques d, d^2,...d^n, et qui sont précisément les inconnues que l'on cherche.

Soit d'abord à déterminer les dérivées successives d'une fonction y de x, définie par une seule équation $F(x, y) = 0$. On a, en dérivant successivement,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial F}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

. . . .

La première équation donne Dy, la deuxième D^2y après qu'on a remplacé Dy par sa valeur, la troisième donnerait D^3y après y avoir remplacé Dy et D^2y par leurs valeurs et ainsi de suite.

Passons ensuite au cas le plus général où l'on considère m fonctions u, v,... des n variables indépendantes x, y,..., définies par les m équations

$$F_i\,(x, y,\ldots u, v,\ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2,\ldots m)$$

On en tire, en différentiant de proche en proche, les systèmes successifs :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \cdots + \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv + \cdots\right) F_i = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \cdots + \frac{\partial}{\partial u} du + \cdots\right)^2 F_i + \frac{\partial F_i}{\partial u} d^2u + \frac{\partial F_i}{\partial v} d^2v + \cdots = 0.$$

. . . .

Le premier système donne, comme nous le savons, les différentielles totales du, dv,... Portant ces valeurs dans le système suivant, on en déduit les différentielles d^2u, d^2v,... et ainsi de suite. On a chaque fois à résoudre un système d'équations linéaires. Les inconnues sont du, dv,... dans le premier système, d^2u, d^2v,... dans le second, etc... On remarquera que le déterminant des coefficients des inconnues est le même dans tous ces systèmes. C'est le déterminant J que l'on suppose différent de zéro pour que les équations soient résolubles.

Les dérivées partielles d'ordre p des fonctions u,... s'obtiennent encore par le principe du n° 121 en identifiant la valeur obtenue pour d^pu,... avec l'expression générale de cette différentielle

$$d^pu = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \cdots\right)^p u.$$

D'ailleurs on peut aussi déterminer directement ces dérivées par des dérivations totales successives effectuées sur les équations proposées par rapport à chacune des variables indépendantes. Toutefois le procédé par différentiations totales successives sera généralement plus pratique.

Exercices.

1. Calculer les dérivées successives de la fonction y de x définie par l'équation

$$\text{Log}\sqrt{x^2 + y^2} = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}.$$

R. $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y}{x - y}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\,\dfrac{x^2 + y^2}{(x - y)^3}, \ldots$

2. Dérivées successives des fonctions y et z de x définies par les deux équations

$$x + y + z = a, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = b^2.$$

R. $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z - x}{y - z}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3b^2 - a^2}{(z - y)^3}, \ldots$

3. Différentielles totales et dérivées partielles de la fonction z des variables x et y définie par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

R. $$dz=-\frac{c^2}{z}\left(\frac{x}{a^2}dx+\frac{y}{b^2}dy\right)$$

$$d^2z=-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}dx\,dy+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right]$$

4. Différentielles totales et dérivées partielles des fonctions z et u de x et y définies par deux équations

$$x+y+z+u=a,\qquad x^2+y^2+z^2+u^2=b.$$

R. $$dz=\frac{(u-x)\,dx+(u-y)\,dy}{z-u},\ du=\frac{(z-x)\,dx+(z-y)\,dy}{u-z},\dots$$

5. Etant données 2 équations entre quatre variables x, y, u, v on peut considérer u, v comme fonctions de x, y ou x, y comme fonctions de u, v. Les dérivées partielles de u, v dans la première hypothèse, celles de x, y dans la seconde, vérifient les équations

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}=1,\ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial v}=0,$$

et deux autres analogues qu'on obtient en permutant x et y dans les précédentes.

§ 3. Maxima et minima des fonctions implicites.

148. Fonctions implicites d'une variable. — Soit y une fonction de x, définie par l'équation non résolue

(1) $$F(x,y)=0.$$

Il s'agit de déterminer ses maxima et ses minima. Nous supposons ici que la fonction F et ses dérivées partielles sont bien déterminées et continues et nous considérons seulement les valeurs de x pour lesquelles y et ses dérivées satisfont aux conditions de continuité.

Les valeurs de x qui correspondent à un maximum ou à un minimum doivent d'après le théorème du nº 99 annuler $dy : dx$. L'équation (1) donne

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

et on en conclut, $dy : dx$ étant nul,

(2) $$\frac{\partial F}{\partial x}=0.$$

On cherche donc les systèmes de valeurs de x et y qui satisfont à la

fois aux équations (1) et (2). Il restera à discuter ces diverses solutions d'après le signe de $d^2y : dx^2$.

En dérivant une deuxième fois l'équation (1) et en observant que $dy : dx = 0$, on trouve

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

Si l'on suppose $\frac{\partial F}{\partial y}$ différent de zéro, il y aura donc :

Maximum, si $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ sont de même signe ;

Minimum, si ces dérivées sont de signes contraires ;

Doute, si $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$.

149. Maxima et minima relatifs d'une fonction explicite de deux variables. — Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables, liées entre elles par une équation

$$F(x, y) = 0,$$

en sorte que f ne dépend en réalité que d'une seule variable, par exemple x. Il s'agit de déterminer ses maxima et ses minima. Ceux-ci sont ce qu'on appelle des maxima ou des minima relatifs.

En supposant toujours satisfaites les conditions de continuité, on est donc conduit à annuler la dérivée *totale* de $f(x, y)$, y étant considérée comme fonction de x. D'autre part $\frac{dy}{dx}$ s'obtient en dérivant l'équation $F(x, y) = 0$. On trouve ainsi les deux équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Cette équation combinée avec $F = 0$, donnera les systèmes de valeurs de x, y pour lesquels f peut devenir maximum ou minimum. La vérification pourra se faire au moyen du signe de $d^2 f$.

150. Cas général. — Supposons enfin que l'on cherche les maxima et les minima d'une fonction $f(x, y, \ldots u, v, \ldots)$ de $m + n$ variables liées entre elles par n équations

$$(1) \qquad F_i(x, y, \ldots ; u, v, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

de sorte que f ne dépend en réalité que de m variables indépendantes, par exemple x, y,... Laissant de côté les cas de discontinuité, tout système de valeurs de ces m variables qui rendra f maximum ou minimum devra annuler sa différentielle totale (nº 140). D'autre part, les équa-

tions (1) peuvent être différentiées totalement. On est donc conduit à poser le système de $(n+1)$ équations.

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\cdots+\frac{\partial f}{\partial u}du+\cdots=0\\ &\frac{\partial F_i}{\partial x}dx+\frac{\partial F_i}{\partial y}dy+\cdots+\frac{\partial F_i}{\partial u}du+\cdots=0\\ &(i=1,2,\ldots n)\end{aligned}\right.$$

Entre celles-ci, on peut éliminer les différentielles du, dv,... des n variables dépendantes. L'équation résultante sera de la forme

$$Mdx+Ndy+\cdots=0$$

et, comme elle ne renferme plus que les m différentielles arbitraires, elle se décompose en m autres

$$M=0,\qquad N=0,\ldots,$$

qui, jointes aux n équations (1), constituent un système de $(m+n)$ équations simultanées entre les $(m+n)$ inconnues x, y,... u, v... En résolvant ces équations, on trouvera les systèmes de valeurs des inconnues qui peuvent rendre f maximum ou minimum. Il restera à discuter ces valeurs au moyen du signe de d^2f ou par toute autre méthode, cette discussion étant généralement très compliquée.

151. Méthode des multiplicateurs. — L'élimination des différentielles entre les équations (2) du numéro précédent se fait généralement de la manière la plus commode par la méthode des multiplicateurs, qui introduit plus de symétrie dans les calculs. On multiplie respectivement les équations (2), hormis la première, par des facteurs à déterminer λ_1, λ_2,... λ_m, puis on additionne toutes ces équations (2) membre à membre. On trouve un résultat de la forme

$$Adx+Bdy+\cdots+Pdu+\cdots=0.$$

On imagine que l'on dispose des m facteurs arbitraires λ de manière à faire évanouir dans cette équation les coefficients P,... des m différentielles du,... qui ne sont pas indépendantes. Alors il ne reste plus dans l'équation que des différentielles arbitraires, de sorte que les autres coefficients doivent également s'annuler. On est ainsi conduit à annuler les coefficients A, B,... P,... de toutes les différentielles, ce qui fournit $m+n$ équations.

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x}+\cdots=0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{\partial f}{\partial u}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial u}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial u}+\cdots=0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

Les systèmes (**1**) et (**3**) renferment en tout $2m + n$ équations, qui serviront à déterminer les valeurs des $m + n$ variables $x, y, \ldots u, \ldots$ et des m facteurs inconnus $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$.

Remarque I. — Le système (**3**) est le même que celui que l'on forme en cherchant les maxima et les minima de la fonction Φ, définie par l'équation

$$\Phi = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \cdots + \lambda_m F_m,$$

et dans laquelle on considère $x, y, \ldots u, \ldots$ comme des variables indépendantes et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ comme des constantes.

Remarque II. — La considération de la fonction Φ est aussi commode pour la discussion du signe de d^2f. En effet, l'équation $\Phi = f$ est une conséquence des équations (**1**) ; on a donc, en vertu des mêmes équations, $d^2f = d^2\Phi$. D'autre part,

$$d^2\Phi = d^2f + \lambda_1 d^2F_1 + \cdots + \lambda_m d^2F_m.$$

Remplaçons dans le second membre les différentielles secondes par leurs expressions générales

$$d^2F = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \cdots + \frac{\partial}{\partial u}du + \cdots\right)^2 F + \frac{\partial F}{\partial u}d^2u + \cdots$$

Les termes en $d^2u, d^2v, \ldots$ disparaîtront en vertu des équations (**3**) et il restera

$$d^2f = d^2\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \cdots + \frac{\partial}{\partial u}du + \cdots\right)^2 \Phi.$$

On peut donc remplacer d^2f par $d^2\Phi$, qui se calcule encore comme si toutes les variables étaient indépendantes. Bien entendu, pour la discussion du signe de d^2f, il faudra peut-être encore éliminer les différentielles premières $du, \ldots$ des variables dépendantes. Mais l'introduction de Φ a eu pour avantage d'éliminer immédiatement leurs différentielles secondes.

Exercices.

1. Trouver la route que doit suivre un rayon lumineux pour aller d'un point A à un point B dans le moindre temps possible. Ces points sont situés dans deux milieux distincts où les vitesses de la lumière sont respectivement u et v. On suppose plane la surface de séparation des deux milieux.

R. On voit de suite que cette route est dans le plan mené par A et B normalement à la surface de séparation. Soient a et b les distances de A et de B au plan de séparation, x et y les angles respectifs du rayon incident et du rayon refracté avec la normale à ce plan. La fonction qui doit être un minimum est

$$f(x, y) = \frac{a}{u \cos x} + \frac{b}{v \cos y}$$

avec la condition

$$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{tg} y = \text{const.}$$

On trouve $\sin x : \sin y = u : v$.

2. Plus courte distance d'un point à un plan.

3. Triangle de périmètre minimum inscrit dans un triangle donné.

R. C'est le triangle formé en joignant les pieds des trois hauteurs.

4. Déterminer les axes de la section faite dans un ellipsoïde par un plan.

R. Soient, en coordonnées rectangulaires,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad lx + my + nz = 0,$$

les équations de l'ellipsoïde et du plan. On doit chercher les maxima et minima de la fonction

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

les variables étant liées par les équations précédentes.

La méthode des multiplications donne

$$x + \lambda_1 \frac{x}{a^2} + \lambda_2 l = 0, \quad y + \lambda_1 \frac{y}{b^2} + \lambda_2 m = 0, \quad z + \lambda_1 \frac{z}{c^2} + \lambda_2 n = 0.$$

On en tire

$$\lambda_1 = -r^2, \qquad \lambda^2 = \left[\left(\frac{al}{a^2 - r^2}\right)^2 + \left(\frac{bm}{b^2 - r^2}\right)^2 + \left(\frac{cn}{c^2 - r^2}\right)^2\right].$$

Les carrés r^2 des demi axes de la section sont les deux racines de l'équation

$$\frac{a^2l^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2m^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2n^2}{r^2 - c^2} = 0.$$

5. Même problème pour la *surface d'élasticité*

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2.$$

R. On trouve, pour déterminer les maxima et les minima de r, l'équation

$$\frac{l^2}{r^2 - a^2} + \frac{m^2}{r^2 - b^2} + \frac{n^2}{r^2 - c^2} = 0.$$

6. Déterminer les axes de la conique qui a pour équation en coordonnées obliques

$$\mathrm{A}x^2 + 2\,\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 = \mathrm{H}.$$

R. Soit θ l'angle des axes. Il faut chercher les maxima et minima de

$$r^2 = x^2 + y^2 + 2\,xy \cos\theta.$$

La méthode des multiplicateurs donne

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y = \lambda\,(x + y\cos\theta), \qquad \mathrm{B}x + \mathrm{C}y = \lambda\,(y + x\cos\theta).$$

D'où $\lambda r^2 = H$ et les valeurs de λ soient les racines de l'équation

$$(A - \lambda)(C - \lambda) = (B - \lambda \cos \theta)^2.$$

7. Problème analogue pour une surface du second degré.

8. Partager le nombre positif a en trois parties x, y, z telles que $f = x^m y^n z^p$ soit maximum (m, n, p étant positifs).

R. On trouve facilement $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{a}{m+n+p}$. Le caractère d'un maximum se vérifie immédiatement car on a, pour ces valeurs de x, y, z,

$$d^2 f = -\left(\frac{m dx^2}{x^2} + \frac{n dy^2}{y^2} + \frac{p dz^2}{z^2}\right) f < 0.$$

§ 4. Changement de variables.

Il arrive fréquemment que l'on doive transformer les expressions différentielles en substituant de nouvelles variables aux anciennes. Ces calculs se font par l'application des règles générales de différentiation. Mais il peut être utile d'indiquer un procédé systématique pour effectuer les transformations les plus usuelles. Nous commencerons par résoudre une question préalable.

152. Dérivées successives d'une fonction par rapport à une autre fonction. — Jusqu'ici, tant qu'il a été question des dérivées successives de y par rapport à x, on a choisi x comme variable indépendante et supposé dx constant. On a, dans ce cas,

$$D_x y = \frac{dy}{dx}, \quad D_x^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots \quad D_x^n y = \frac{d^n y}{dx^n}, \ldots$$

La première formule subsiste, même si x est une fonction d'une autre variable indépendante (nº 61, V). Mais il n'en est plus ainsi des suivantes qui supposent dx constant (nº 74). Nous allons donc calculer les dérivées successives de y par rapport à x au moyen des différentielles successives de ces deux variables, sans choisir x comme variable indépendante. Il suffit d'appliquer les règles générales de différentiation et l'on trouve, par un calcul de proche en proche,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} D_x y &= \frac{dy}{dx} \\ D_x^2 y &= \frac{d . D_x y}{dx} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{dx\, d^2 y - dy\, d^2 x}{dx^3} \\ D_x^3 y &= \frac{d . D_x^2 y}{dx} = \frac{dx(dx\, d^3 y - dy\, d^3 x) - 3 d^2 x (dx\, d^2 y - dy\, d^2 x)}{dx^5} \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite. La loi générale est assez compliquée.

Supposons maintenant que la variable indépendante soit t et propo sons-nous d'exprimer les dérivées successives de y par rapport à x au moyen des dérivées successives de x et de y par rapport à t. En désignant par des accents les dérivées par rapport à t, on a les formules

$$dx = x'dt, \quad d^2x = x''dt^2, \quad d^3x = x'''dt^3, \ldots$$
$$dy = y'dt, \quad d^2y = y''dt^2, \quad d^3y = y'''dt^3, \ldots$$

Substituons ces valeurs dans les formules précédentes, dt disparaîtra du résultat, car les seconds membres de ces formules sont homogènes et de degré 0 par rapport aux indices de différentiation. Il viendra donc

$$(2) \quad \begin{cases} D_x y = \dfrac{y'}{x'} \\ D_x^2 y = \dfrac{x'y'' - y'x''}{x'^3} \\ D_x^3 y = \dfrac{x'(x'y''' - y'x''') - 3x''(x'y'' - y'x'')}{x'^5}, \text{ etc.} \end{cases}$$

153. Fonctions d'une seule variable. — Soit y une fonction de la variable indépendante x et

$$(3) \qquad V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right)$$

une expression renfermant x, y et les dérivées de y par rapport à x jusqu'à un certain ordre. La transformation de cette expression par un changement de variables donne lieu à deux problèmes principaux :

1°) *Changement de la variable indépendante.* Etant donnée une relation

$$(4) \qquad x = \varphi(t)$$

entre x et une nouvelle variable t, on choisit t comme nouvelle variable indépendante au lieu de x. Il s'agit d'introduire t au lieu de x dans V et, par suite, les dérivées de y par rapport à t au lieu des dérivées par rapport à x.

Ce problème peut être résolu au moyen des formules (**2**) où l'on trouve les valeurs des dérivées de y par rapport à x en fonction des dérivées x', x''..., y', y''... de x et de y par rapport à t. Après avoir remplacé les dérivées x', x''... par leurs expressions $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$,... tirées de (**4**), on substituera ces valeurs dans V. Il ne restera plus qu'à éliminer x par la substitution $x = \varphi(t)$; le problème sera résolu.

2°) Le deuxième problème est celui du *changement de toutes les variables*. Etant données deux équations

$$F(x, y. t, u) = 0, \qquad F_1(x, y, t, u) = 0$$

entre x, y et deux nouvelles variables t, u, on demande d'exprimer V au moyen de t, u et des dérivées de u par rapport à t. Dérivons totalement les équations données par rapport à t, en considérant x, y, u comme des fonctions de t prise comme variable indépendante. On en déduit de proche en proche (n° 146) les valeurs des dérivées x', y', x'', y'',... de x et y par rapport à t en fonction de x, y, u, u', u'',... Substituons ces valeurs dans les équations (2), nous obtiendrons des expressions de $D_x y$, $D_x^2 y$,... que nous porterons dans V. Il ne restera plus qu'à éliminer x, y au moyen des équations $F = 0$ et $F_1 = 0$. Le problème sera résolu.

Ce cas se présente lorsque, une grandeur géométrique étant exprimée en coordonnées rectangulaires x et y par une expression telle que V, on veut la transformer en coordonnées polaires r et θ par les relations

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Les accents désignant des dérivées par rapport à θ, on a, dans ce cas,

$$x' = r'\cos\theta - r\sin\theta, \qquad y' = r'\sin\theta + r\cos\theta,$$
$$x'' = r''\cos\theta - 2r'\sin\theta - r\cos\theta, \qquad y'' = r''\sin\theta + 2r'\cos\theta - r\sin\theta$$

et les relations (2) deviennent

$$D_x y = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}, \quad D_x^2 y = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^3}, \quad \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs de x, y, $D_x y$,... dans V, on aura résolu la question.

154. Fonctions de plusieurs variables. — Nous supposerons, pour abréger, qu'il n'y ait que deux variables indépendantes, mais la méthode sera générale. Soit H une fonction des deux variables indépendantes x et y et

$$(5) \qquad V = f\left(x, y, H, \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \ldots\right)$$

une expression renfermant les variables et les dérivées partielles de H jusqu'à un certain ordre. Comme dans le cas précédent, la transformation de cette expression par un changement de variables donne lieu à deux problèmes principaux.

1° *Changement des variables indépendantes*. On donne deux relations entre x, y et deux nouvelles variables u, v.

(6) $F_1(x,y,u,v) = 0 \qquad F_2(x,y,u,v) = 0$

On choisit u,v comme variables indépendantes au lieu de x,y et l'on demande d'introduire u,v au lieu de x,y dans V et, par suite, les dérivées de H par rapport à u,v au lieu de celles par rapport à x,y.

Il faut d'abord exprimer les dérivées partielles de H par rapport à x, y en fonction des dérivées par rapport à u,v. On y arrive comme il suit : Prenant x,y comme variables indépendantes, on différentie successivement les équations données $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$. On en déduit, de proche en proche (n° 147), les valeurs de du, dv, d^2u, d^2v,... en fonction de x, y, u, v, dx et dy. Portant ces valeurs dans les expressions suivantes des différentielles de H (n° 120) :

$$(7)\quad \begin{cases} dH = \dfrac{\partial H}{\partial u}\, du + \dfrac{\partial H}{\partial v}\, dv, \\ d^2H = \left(\dfrac{\partial}{\partial u}\, du + \dfrac{\partial}{\partial v}\, dv\right)^2 H + \dfrac{\partial H}{\partial u}\, d^2u + \dfrac{\partial H}{\partial v}\, d^2v. \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{cases}$$

on trouve, en réduisant,

$$(8)\quad \begin{cases} dH = p\, dx + q\, dy, \\ d^2H = r\, dx^2 + 2\, s\, dx\, dy + t\, dy^2, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{cases}$$

où p, q, r, s, t, ... renferment x, y, u, v et les dérivées de H par rapport à u, v. Les variables x, y étant indépendantes, on en conclut (n° 121)

$$\frac{\partial H}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = q, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = r, \text{ etc.}$$

Ce sont les expressions des dérivées partielles qu'on se proposait d'obtenir.

On porte ces valeurs dans V et on élimine, s'il y a lieu, x, y par les équations (6). Le problème sera résolu.

2° *Changement de toutes les variables.* On donne trois relations

(9) $F_1(x, y, H, u, v, K) = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 = 0,$

entre x, y, H et trois nouvelles variables u, v, K. On demande d'exprimer V en fonction de u, v, K et des dérivées partielles de K considérée comme fonction de u, v.

Choisissant x, y comme variables indépendantes, on différentie totalement les trois équations données et on en tire, de proche en proche, les valeurs des différentielles successives de u, v, K, en fonction des différentielles de x, y, H. Les différentielles de K en particulier, sont de la forme

$$(10)\quad \begin{cases} dK = A\, dx + B\, dy + C\, dH, \\ d^2K = D\, dx^2 + \cdots + E\, dH^2 + F\, d^2H, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{cases}$$

où A, B, C, D, ... sont des fonctions connues de x, y, H, u, v, K.

D'autre part, portons les valeurs analogues trouvées pour du, dv, d^2u, d^2v, ... dans les formules générales

$$(11)\quad \begin{cases} dK = \dfrac{\partial K}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial K}{\partial v}\,dv \\ d^2K = \left(\dfrac{\partial}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial}{\partial v}\,dv\right)^2 K + \dfrac{\partial K}{\partial u}\,d^2u + \dfrac{\partial K}{\partial v}\,d^2v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il viendra, en réduisant,

$$(12)\quad \begin{cases} dK = M\,dx + N\,dy + P\,dH, \\ d^2K = Q\,dx^2 + \cdots + R\,dH^2 + S\,d^2H, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

où M, N, P, Q, ... contiennent linéairement les dérivées partielles de K par rapport à u, v.

En égalant les valeurs (10) et (12) de dK, d^2K, ... il vient

$$\begin{gathered} (M - A)\,dx + (N - B)\,dy + (P - C)\,dH = 0, \\ (Q - D)\,dx^2 + \cdots + (R - E)\,dH^2 + (S - F)\,d^2H = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

La première équation donne dH. Portant cette valeur dans la suivante, on en tire d^2H, et ainsi de suite. Les résultats sont de la forme

$$\begin{gathered} dH = p\,dx + q\,dy, \\ d^2H = r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2, \end{gathered}$$

où p, q, r, ... sont des fonctions rationnelles connues des dérivées de K par rapport à u et v. On conclut de ces relations

$$\frac{\partial H}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = q, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = r, \text{ etc.}$$

On portera ces valeurs en V. On éliminera, s'il y a lieu, x, y, H par les relations $F_1 = F_2 = F_3 = 0$. Le problème sera résolu.

155. Problème I. — *Soit* H *une fonction de deux variables* x, y. *On demande de transformer l'expression*

$$(13)\qquad V = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$$

par les formules de transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires dans le plan :

$$(14)\qquad x = u\cos v, \qquad y = u\sin v.$$

C'est le premier des deux problèmes résolus au numéro précédent. Suivant la méthode générale, on différentie les équations données et il vient

$$\begin{gathered} dx = (\cos v)\,du - (\sin v)\,u\,dv, \\ dy = (\sin v)\,du + (\cos v)\,u\,dv. \end{gathered}$$

On en tire

$$(15)\qquad \begin{cases} du = \cos v\, dx + \sin v\, dy \\ u\, dv = -\sin v\, dx + \cos v\, dy \end{cases}$$

et, en différentiant de nouveau,

$$d^2u = (-\sin v\, dx + \cos v\, dy)\, dv = u\, dv^2$$
$$du\, dv + u\, d^2v = -(\cos v\, dx + \sin v\, dy)\, dv = -du\, dv.$$

On a donc

$$d^2u = u\, dv^2, \qquad d^2v = -2\frac{du\, dv}{u}.$$

Portant ces valeurs dans la seconde formule (7), elle devient

$$d^2\mathrm{H} = \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial u^2} du^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial u\, \partial v} - \frac{1}{u}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial v}\right) du\, dv + \left(\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial v^2} + u\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}\right) dv^2.$$

Il reste à remplacer du et dv par leurs valeurs (15) et à ordonner par rapport à dx et dy. La quantité V sera la somme des coefficients de dx^2 et de dy^2. Or, la somme de ces coefficients est égale à 1 dans le développement de du^2, à 0 dans celui de $du\, dv$ et à $1 : u^2$ dans celui de dv^2. On a donc immédiatement

$$(16)\qquad \mathrm{V} = \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial u^2} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial v^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}$$

156. Problème II. — *Soit* H *une fonction de trois variables* x, y, z. *Transformer l'expression*

$$(17)\qquad \mathrm{V} = \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial z^2}$$

par les formules de transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires dans l'espace :

$$(18)\qquad x = u \sin w \cos v, \quad y = u \sin w \sin v, \quad z = u \cos w.$$

On simplifie le problème en faisant la transformation en deux fois. Posons d'abord $u \sin w = u_1$ et éliminons x, y par les relations

$$(19)\qquad x = u_1 \cos v, \qquad y = u_1 \sin v.$$

On aura, par la solution du problème précédent,

$$(20)\qquad \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial u_1^2} + \frac{1}{u_1^2}\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial v^2} + \frac{1}{u_1}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_1}$$

Eliminons ensuite z et u_1 par les relations

$$(21)\qquad z = u \cos w, \qquad u_1 = u \sin w.$$

On aura

$$(22)\qquad \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial u_1^2} = \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial u^2} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial w^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}.$$

Ajoutant membre à membre les équations (**20**) et (**22**), il vient

$$(23)\quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}+\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 H}{\partial w^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial H}{\partial u}$$
$$+\frac{1}{u_1^2}\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}+\frac{1}{u_1}\frac{\partial H}{\partial u_1}$$

Il faut encore exprimer $\frac{\partial H}{\partial u_1}$ au moyen de u, w par les relations (**21**).

Pour cela, on forme les valeurs suivantes, analogues aux valeurs (**15**) :

$$du=\cos w\, dz+\sin w\, du_1,\qquad u dw=-\sin w\, dz+\cos w\, du_1\ ;$$

on les substitue dans l'expression

$$\partial H=\frac{\partial H}{\partial u}\, du+\frac{\partial H}{\partial w}\,\partial w$$

et, en cherchant le coefficient de du_1, on trouve

$$\frac{\partial H}{\partial u_1}=\frac{\partial H}{\partial u}\sin w+\frac{1}{u}\frac{\partial H}{\partial w}\cos w.$$

Portant cette valeur dans (**23**), on a finalement

$$(24)\quad V=\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}+\frac{2}{u}\frac{\partial H}{\partial u}+\frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial w^2}+\frac{\cos w}{\sin w}\frac{\partial H}{\partial w}\right)+\frac{1}{u^2\sin^2 w}\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}$$

157. Problème III. Transformation de Legendre. — Dans certains cas, les relations qui lient les nouvelles variables aux anciennes renferment aussi leurs dérivées. La transformation de Legendre en est un exemple remarquable.

Soit z une fonction de deux variables indépendantes x, y. On pose

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

On suppose qu'il n'y ait pas de relation entre p et q et l'on se propose d'exprimer les dérivées secondes de z par rapport à x et à y en prenant p, q comme nouvelles variables indépendantes, et comme nouvelle fonction, la variable u définie par l'équation

$$(1)\qquad u=px+qy-z.$$

En différentiant cette relation et en observant que l'on a

$$(2)\qquad dz=p\,dx+q\,dy,$$

il vient

$$du=x\,dp+y\,dq.$$

On en conclut, p et q étant indépendants par hypothèse,

$$\frac{\partial u}{\partial p}=x,\qquad \frac{\partial u}{\partial q}=y$$

puis, en différentiant ces deux relations,

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial p^2}dp + \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}dq = dx,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}dp + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}dq = dy$$

Les différentielles dx et dy étant arbitraires dans ces deux équations, on en conclut que le déterminant

$$(4)\qquad \mathrm{H} = \frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2$$

est différent de zéro par hypothèse. Par suite, ces deux équations peuvent se résoudre par rapport à dp et à dq et il vient

$$dp = \frac{1}{\mathrm{H}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}dx - \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}dy\right),\quad dq = \frac{1}{\mathrm{H}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}dy - \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}dx\right).$$

Portant ces valeurs dans la différentielle totale

$$d^2 z = dp\,dx + dq\,dy,$$

obtenue en différentiant l'équation (2) et en considérant x, y comme les variables indépendantes, dx et dy comme constants, on trouve enfin

$$d^2 z = \frac{1}{\mathrm{H}}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}dx^2 - 2\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial p^2}dy^2\right]$$

Cette formule résout la question. On en conclut

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}.$$

Exercices.

1. Exprimer les dérivées de y par rapport à x en fonction des dérivées x', x'', ... de x par rapport à y.

R. $\quad \mathrm{D}_x y = \frac{1}{x'},\quad \mathrm{D}_x^2 y = -\frac{x''}{x'^3},\quad \mathrm{D}_x^3 y = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}$, etc.

2. Transformer, en prenant y comme variable indépendante, l'équation

$$\frac{dy}{dx}\frac{d^3 y}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 = 0.$$

R. On trouve $x''' = 0$.

3. Transformer, par la relation $x = \cos t$, l'équation

$$(1 - x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + a^2 y = 0.$$

R. $y'' + a^2 y = 0$.

4. Transformer, par la relation $x = \sqrt{1 - t^2}$, l'équation

$$(x - x^3)\frac{d^2 y}{dx^2} + (1 - 3x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

R. L'équation conserve la même forme. On y remplacera seulement

la lettre x par la lettre t. On en conclut que $y = \varphi(x)$ étant une solution de cette équation, $y = \varphi(\sqrt{1 - x^2})$ en sera une autre.

5. Montrer que l'on a, par les relations $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}$$

6. Transformer par les relations $u = xy$, $v = 1 : y$ l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\,xy^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2\,(y - y^3)\frac{\partial z}{\partial y} + x^2y^2z = 0.$$

R. L'équation conserve la même forme. On y remplacera seulement la lettre x par u et la lettre y par v. On en conclut que, si $z = \varphi(x, y)$ est une solution de cette équation, $z = \varphi\left(xy, \frac{1}{y}\right)$ en est une autre.

7. Soit H une fonction de trois variables x, y, z. Transformer les expressions

$$\Delta_1 = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2, \qquad \Delta_2 = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2},$$

par la substitution orthogonale

$$\begin{aligned} x &= au + bv + cw, & a^2 + b^2 + c^2 &= 1, & aa' + bb' + cc' &= 0, \\ y &= a'u + b'v + c'w, & a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, & aa'' + bb'' + cc'' &= 0, \\ z &= a''u + b''v + c''w. & a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1. & a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0. \end{aligned}$$

R. Les deux expressions Δ_1 et Δ_2 conservent la même forme. On y remplacera seulement les lettres x, y, z par u, v, w.

CHAPITRE V.

Intégrales indéfinies. Méthodes classiques d'intégration.

---

§ 1. Procédés généraux d'intégration.

158. Problème des quadratures. — Le calcul intégral est l'inverse du calcul différentiel. Il a pour objet de remonter des relations données entre les variables et leurs différentielles aux relations qui existent entre les variables seulement.

La première question traitée dans le calcul différentiel était de trouver la dérivée ou la différentielle d'une fonction donnée $f(x)$. Le calcul intégral doit débuter par la question inverse :

Une fonction $f(x)$ étant donnée, trouver toutes les fonctions qui ont $f(x)$ pour dérivée ou, ce qui revient au même, $f(x)\,dx$ pour différentielle.

Ce problème a reçu le nom de *Problème des quadratures*, d'après le problème de géométrie auquel il est étroitement lié et que nous étudierons plus loin. On doit d'abord se demander s'il existe toujours une fonction ayant pour dérivée $f(x)$, ou si le produit de $f(x)$ par dx constitue toujours une différentielle. Nous prouverons bientôt, en exposant la théorie des intégrales définies, qu'il en est bien ainsi dans tout intervalle où la fonction $f(x)$ est continue. Nous admettrons provisoirement ce résultat dans le chapitre actuel et nous supposerons une fois pour toutes que la condition de continuité est réalisée dans les théorèmes généraux que nous allons énoncer.

159. Fonction primitive. Intégrale indéfinie. — Une fonction $F(x)$ qui a $f(x)$ pour dérivée ou $f(x)\,dx$ pour différentielle s'appelle une *fonction primitive de* $f(x)$ ou une *intégrale* de $f(x)\,dx$.

La connaissance d'une seule fonction primitive de $f(x)$ fournit la solution complète du problème des quadratures. On a, en effet, le théorème suivant :

Soit $f(x)$ une fonction continue, si $F(x)$ a pour dérivée $f(x)$ dans un intervalle (a, b), l'expression

$$F(x) + C,$$

où C est une constante arbitraire, représente, dans cet intervalle, toutes les fonctions qui ont pour dérivée $f(x)$.

En effet $F(x) + C$ a pour dérivée $f(x)$; et, réciproquement, toute fonction qui a $f(x)$ pour dérivée, ayant la même dérivée que $F(x)$, ne diffère de $F(x)$ que par une constante (nº 71).

D'après cela, la fonction $F(x) + C$ où C est une constante arbitraire, est la fonction la plus générale qui ait $f(x)$ pour dérivée et $f(x)\,dx$ pour différentielle. Cette fonction se nomme l'*intégrale indéfinie de* $f(x)\,dx$ et se représente par la notation

$$\int f(x)\,dx,$$

qui comprend implicitement la constante arbitraire.

160. Propriétés des intégrales indéfinies qui résultent immédiatement de leur définition. — 1º Par définition de l'intégrale indéfinie, on a la relation

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Donc les signes d et $\int$ se détruisent quand le signe d est placé devant le second.

Pareillement, par définition,

$$D\int f(x)\,dx = f(x).$$

2º $F(x)$ étant une fonction primitive de $F'(x)$, on a

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

Cette équation peut aussi s'écrire

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Donc les signes d et $\int$ se détruisent encore devant $F(x)$ quand le signe d est le second, mais il faut ajouter une constante arbitraire à la fonction $F(x)$.

3º Un facteur constant peut être mis hors du signe d'intégration. C'est-à-dire que, si a est constant, on a

$$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$$

En effet, les deux membres ont $af(x)$ pour dérivée. Donc ils ne peuvent différer que par une constante. Mais, comme ils comprennent tous deux une constante arbitraire, ils ont le même sens.

4° L'intégrale indéfinie d'une somme de différentielles est égale à la somme des intégrales de chacune des différentielles. Ce théorème est exprimé par la formule

$$\int (u + v - w + \cdots)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx + \cdots$$

En effet, les deux membres ayant la même dérivée $(u + v - w + \cdots)$, ne pourraient différer que par une constante ; mais, comme leur définition comporte une constante arbitraire, ils ont la même signification. Il est vrai qu'il y a en apparence plusieurs constantes arbitraires dans le second membre, car chaque terme en comporte une à lui seul, mais, comme ces constantes s'ajoutent entre elles, elles se réduisent en réalité à une seule distincte.

161. Intégration immédiate. — Les résultats trouvés dans le calcul différentiel permettent d'écrire immédiatement les intégrales de quelques différentielles simples. En effet, lorsque, dans l'expression à intégrer, on reconnaît la différentielle d'une fonction connue $F(x)$, il suffit d'ajouter à celle-ci une constante arbitraire pour obtenir l'intégrale. Cette remarque, appliquée au tableau des différentielles des fonctions élémentaires, conduit à former le tableau suivant, qu'il importe de bien posséder par cœur :

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad \int \frac{dx}{x} = \operatorname{Log} x + C$$

$$\int A^x\,dx = \frac{A^x}{\operatorname{Log} A} + C \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,cot} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x + C = -\operatorname{arc\,cos} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sec} x + C = -\operatorname{arc\,cosec} x + C.$$

Nous allons indiquer maintenant les principaux artifices à l'aide

desquels on peut ramener l'intégration des différentielles plus compliquées aux formules du tableau précédent. Ces artifices sont au nombre de trois : 1° Décomposition en éléments simples ; 2° changement de variables ; 3° intégration par parties.

162. Intégration par décomposition. — C'est l'application de la propriété énoncée au n° 160 (4°). Si l'on peut décomposer la différentielle $f(x)\,dx$ en une somme de termes que l'on sait intégrer, en faisant la somme des intégrales de chaque terme, on obtiendra l'intégrale de $f(x)\,dx$.

Si $f(x)$ est un polynôme entier, l'intégrale s'obtiendra par cette méthode, car on a

$$\int(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)\,dx=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+\cdots+a^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

Cette méthode s'applique aussi à d'autres fonctions. On a, par exemple,

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\operatorname{tg} x-\cot x+C$$

163. Intégration par substitution. — Cette méthode est basée sur la règle de dérivation des fonctions de fonctions.

Soit $F(x)$ une intégrale de $f(x)\,dx$. Proposons-nous de l'exprimer à l'aide d'une nouvelle variable t, liée à x par l'équation

$$x=\varphi(t).$$

Cette intégrale deviendra $F[\varphi(t)]$ qui a pour différentielle

$$F'[\varphi(t)]\,d\varphi(t)=f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Donc on a réciproquement

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=F[\varphi(t)]+C=F(x)+C$$

et, par conséquent,

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Ainsi, pour obtenir l'intégrale de $f(x)dx$ exprimée en fonction de t par la substitution $x=\varphi(t)$, il suffit de faire cette substitution dans la différentielle qui est sous le signe d'intégration.

On voit donc que, si l'on peut choisir la substitution de manière à

ramener $f(x)\,dx$ à une forme que l'on sait intégrer, on obtiendra l'intégrale en fonction de t. Pour l'exprimer en fonction de x, il suffira d'y remplacer t par sa valeur tirée de $x = \varphi(t)$.

On obtient ainsi, par la substitution $x = \frac{t}{a}$,

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\int e^t\,dt = \frac{e^t}{a} + C = \frac{e^{ax}}{a} + C.$$

De même, par la substitution $x = \frac{at}{b}$,

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab}\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\frac{bx}{a} + C.$$

De même, par la substitution $x - p = qt$, on obtient l'intégrale que nous rencontrerons bientôt :

$$\int \frac{q\,dx}{(x-p)^2 + q^2} = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arc\,tg} t + C = \operatorname{arc\,tg}\frac{x-p}{q} + C.$$

Remarque. — Dans les cas simples, il est inutile d'introduire de nouvelles lettres et la substitution se fait mentalement. Ainsi, on peut écrire immédiatement, sans passer tout au long par la substitution $\varphi(x) = t$,

$$\int \frac{d.\varphi(x)}{\varphi(x)} = \operatorname{Log}\varphi(x) + C.$$

C'est ainsi qu'on écrira directement

$$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b}\int \frac{d(a + bx)}{a + bx} = \frac{1}{b}\operatorname{Log}(a + bx) + C.$$

$$\int \frac{2(x-p)\,dx}{(x-p)^2 + q^2} = \int \frac{d[(x-p)^2 + q^2]}{(x-p)^2 + q^2} = \operatorname{Log}[(x-p)^2 + q^2] + C.$$

164. Intégration par parties. — Cette méthode est une conséquence de la règle pour différentier un produit. Soient u et v deux fonctions de x, on a

$$d\,uv = u\,dv + v\,du,$$

d'où

$$u\,dv = d.uv - v\,du.$$

Il vient donc

$$\int u\,dv = \int d.\,uv - \int v\,du.$$

Mais le premier terme du second membre est égal à $uv + C$ et,

comme cette constante C peut être comprise dans le second terme, il reste simplement

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Cette formule renferme la *règle d'intégration par parties*. Elle ramène l'intégration de $u\,dv$ à celle de $v\,du$ qui peut être plus facile.

Soit, par exemple, à intégrer $xe^x dx$. On pose $x = u$ et $e^x = v$ (d'où $e^x dx = dv$). Il vient alors

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

165. Combinaison de diverses méthodes. — On doit souvent employer successivement plusieurs des méthodes précédentes pour effectuer complètement l'intégration. En voici quelques exemples :

1°) En intégrant d'abord par parties et ensuite par substitution, on trouve

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x - \frac{\operatorname{Log}(1+x^2)}{2} + C.$$

2°) On trouve, en intégrant d'abord par décomposition et ensuite par substitution,

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a+bx} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a-bx} = \frac{1}{2ab}\operatorname{Log}\frac{a+bx}{a-bx} + C$$

3°) Par la substitution $x = a \sin\varphi$, il vient d'abord

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2} = a^2\int \cos^2\varphi\,d\varphi$$

Ensuite, en effectuant la décomposition par la formule

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2},$$

il vient

$$a^2\int \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int d\varphi + \frac{a^2}{2}\int \cos 2\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right) + C.$$

Enfin, en revenant à la variable x, on trouve

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + C$$

166. Formules de réduction. — Pour fixer les idées, nous considèrerons un exemple. Soit à intégrer $x^n e^{ax} dx$. Appliquons la formule

d'intégration par parties, en considérant $e^{ax}dx$ comme une différentielle dv (nº 164) ; il viendra

$$\int x^n e^{ax}dx = x^n \frac{e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}dx.$$

Cette formule ramène l'intégrale du premier membre à une intégrale de même forme, mais où l'exposant n est abaissé d'une unité. Si n est entier et positif, cette formule s'applique de proche en proche en changeant successivement n en $(n-1)$, $(n-2)$,... jusqu'à ce que l'exposant de x soit abaissé à zéro. Il n'y a plus alors qu'à intégrer $e^{ax}dx$, ce qui se fait immédiatement. Une formule telle que la précédente, qui s'applique de proche en proche et qui permet de simplifier de plus en plus l'intégrale proposée jusqu'à ce qu'on sache l'intégrer, est ce que l'on nomme une *formule de réduction*. Nous en rencontrerons de nombreux exemples.

167. Dérivation par rapport à un paramètre. — Soit $f(x, a)$ une fonction de la variable x et du paramètre a ; supposons qu'on ait obtenu, en considérant a comme une constante indéterminée,

(1) $$\int f(x, a)\, dx = \text{F}(x, a) + \text{C}.$$

Je dis que l'on peut en déduire, en dérivant par rapport à a sous le signe $\int$,

(2) $$\int \text{D}_a f(x, a)\, dx = \text{D}_a \text{F}(x, a) + \text{C}.$$

Cette règle suppose seulement que les conditions de continuité des dérivées partielles de F qui assurent l'égalité $\text{F}''_{xa} = \text{F}''_{ax}$ soient vérifiées (nº 117).

En effet, les dérivées par rapport à la variable x des deux membres de l'équation (2) sont respectivement

$$\text{D}_a f(x, a) \qquad \text{et} \qquad \text{D}_x \text{D}_a \text{F}(x, a).$$

Ces deux dérivées sont égales, car on peut intervertir par hypothèse D_x et D_a, et l'on a

$$\text{D}_x . \text{D}_a \text{F}(x, a) = \text{D}_a . \text{D}_x \text{F}(x, a) = \text{D}_a f(x, a).$$

Les deux membres de l'équation (2), ayant même dérivée, ne diffèrent que par une constante par rapport à x. Mais, comme ils comprennent tous deux une constante arbitraire, ils ont exactement le même sens.

Le résultat précédent peut être généralisé. En dérivant successivement l'équation (2) par rapport à a et en admettant toujours que les conditions de continuité des dérivées partielles considérées restent vérifiées, on voit que l'on peut aussi conclure de l'équation (1) à la suivante

$$(3) \qquad \int D_a^n f(x, a)\, dx = D_a^n F(x, a) + C.$$

La règle précédente fournit un des procédés les plus commodes pour la détermination des intégrales. Nous allons en donner quelques exemples :

1°) On a

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

Toutes les conditions de continuité supposées sont remplies, pourvu que a soit différent de zéro. En dérivant n fois par rapport à a et en observant que l'on a

$$D_a^n e^{ax} = x^n e^{ax},$$

il viendra, par la règle précédente,

$$(4) \qquad \int x^n e^{ax} dx = D_a^n \frac{e^{ax}}{a} + C.$$

Cette intégrale a été obtenue autrement au n° 166.

2°) Soit $a > 0$; on a, comme cas particulier d'un résultat précédent (n° 163),

$$\int \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{a}} + C.$$

Les conditions de continuité ont lieu, pourvu que a ne puisse s'annuler. Dérivons donc $n - 1$ fois par rapport au paramètre a et observons que

$$D_a^{n-1} \frac{1}{x^2 + a} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x^2 + a)^n};$$

nous obtiendrons, après division par $(-1)^{n-1}(n-1)!$,

$$(5) \qquad \int \frac{dx}{(x^2 + a)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} D_a^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{a}} \right) + C.$$

Les formules (4) et (5) ramènent le calcul des intégrales proposées dans les premiers membres à des déterminations de dérivées et fournissent pour ces intégrales des expressions très condensées. Elles s'appliquent aussi bien au cas où l'on donne à a des valeurs particu-

lières. La formule (5), par exemple, fournit un procédé élégant pour calculer l'intégrale classique

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

Seulement, il faut effectuer les n dérivations par rapport à a avant de faire $a = 1$ dans cette formule. Toutefois, le procédé le plus commode pour calculer cette intégrale en pratique n'est pas celui-là. Il résulte d'une *formule de réduction* que nous ferons connaître plus tard (nº 185).

168. Variabilité de forme de l'intégrale. — 1º L'intégrale d'une même fonction peut s'écrire parfois sous des formes en apparence très différentes. Cela provient de ce que l'on peut séparer de la constante arbitraire une constante déterminée pour la réunir à la fonction intégrale. Ainsi, au lieu de l'expression habituelle

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C,$$

on pourra écrire

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = (\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} 1) + C = \operatorname{arc\,tg} \frac{x-1}{x+1} + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = (\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} 1) + C = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{1-x} + C$$

et ces diverses formes sont équivalentes.

2º) L'intégrale d'une même fonction peut se présenter sous des formes analytiques différentes, lorsque x varie dans des intervalles différents. Cette remarque s'applique à l'intégrale

$$\int \frac{dx}{x-a} = \operatorname{Log}(x-a) + C.$$

Les quantités négatives n'ayant pas de logarithme réel, cette formule suppose $x > a$. Si $x < a$, on aura

$$\int \frac{dx}{x-a} = -\int \frac{dx}{a-x} = \operatorname{Log}(a-x) + C.$$

La forme de cette intégrale change donc suivant que x est $> a$ ou que x est $< a$. Afin de ne pas revenir à chaque instant sur cette distinction, nous conviendrons, une fois pour toutes, que, lorsque la valeur d'une intégrale renferme un logarithme, la quantité sous le signe logarithmique sera prise en valeur absolue.

Exercices.

1°) Par substitution.

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \operatorname{Log} \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\operatorname{Log} \cos x + C \qquad \int \frac{x\,dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} x\right) + C \qquad \int \frac{dx}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$$

2°) Par décomposition.

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \operatorname{tg} x - x + C \qquad \int dx \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2} + C$$

$$\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} + x\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x} = \frac{1}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2\sin^2 x} + 2 \operatorname{Log} \operatorname{tg} x + C.$$

3°) Par parties.

$$\int dx \arcsin x = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

$$\int \arcsin x \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = x - \sqrt{1 - x^2} \arcsin x + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg} x + \operatorname{Log} \cos x + C$$

$$\int e^{ax} \cos x\,dx = \frac{e^{ax}(\sin x + a \cos x)}{1 + a^2} + C$$

4°) Combinaison de diverses méthodes.

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{a + b \operatorname{tg} x} = \frac{ax + b \operatorname{Log}(a \cos x + b \sin x)}{a^2 + b^2} + C$$

$$\int x \operatorname{tg}^2 x\,dx = x \operatorname{tg} x + \operatorname{Log} \cos x - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int \frac{\arcsin x\,dx}{(1 - x^2)^{3/2}} = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2} \operatorname{Log}(1 - x^2) + C$$

$$\int \frac{e^{a \operatorname{arctg} x}\,dx}{(1 + x^2)^{3/2}} = \frac{e^{a \operatorname{arctg} x}(a + x)}{(1 + a^2)\sqrt{1 + x^2}} + C$$

$$\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x\,dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x \left(x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x\right) - \frac{1}{2} \operatorname{Log}(1 + x^2) + C$$

N. B. Les trois derniers exercices se ramènent à d'autres qui précèdent, le premier par la substitution $x = \sin\varphi$ et les deux autres par la substitution $x = \operatorname{tg}\varphi$.

§ 2. Intégration des fractions rationnelles.

169. Décomposition de la fraction à intégrer. — Soit à intégrer l'expression

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx$$

où $f(x)$ et $F(x)$ sont des polynômes entiers à coefficients réels. Quand $f(x)$ n'est pas de degré moindre que $F(x)$, on commence par effectuer la division. Le quotient $f(x) : F(x)$ se décompose en une partie entière et une fraction proprement dite. L'intégrale de la partie entière s'obtient immédiatement (n° 162) et l'on est ramené à intégrer une fraction proprement dite.

Supposons donc que l'expression à intégrer ait été débarrassée de sa partie entière et que $f(x) : F(x)$ soit une fraction proprement dite. Décomposons $F(x)$ en ses facteurs linéaires et soit

$$F(x) = (x-a)^{\alpha}\,(x-b)^{\beta}\ldots$$

On sait en déduire (n° 105) la formule de décomposition de $f(x) : F(x)$ en fractions simples.

Supposons que cette formule soit la suivante :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} = {} & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} \\ & + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} \\ & + \cdots \end{aligned}\right.$$

Sous cette forme la fonction est préparée pour l'intégration. Nous rangerons les termes de la décomposition en deux catégories. La première catégorie comprendra tous les termes de la première colonne où le dénominateur est du premier degré. La seconde catégorie comprendra tous les autres termes où le dénominateur est de degré supérieur au premier. Il n'y aura donc de termes de la seconde catégorie que si $F(x)$ a des racines multiples.

170. Intégration dans le cas des racines réelles. — Si toutes les ra-

cines a, b,... sont réelles, tous les termes de la décomposition sont immédiatement intégrables et on obtient la formule d'intégration

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = {} & A_1 \operatorname{Log}(x-a) - \frac{A_2}{(x-a)} - \cdots - \frac{1}{\alpha-1}\frac{A_\alpha}{(x-a)^{\alpha-1}} \\ & + B_1 \operatorname{Log}(x-b) - \frac{B_2}{(x-b)} - \cdots - \frac{1}{\beta-1}\frac{B_\beta}{(x-b)^{\beta-1}} \\ & + \cdots \end{aligned}\right.$$

L'intégrale se compose d'une partie logarithmique et d'une partie rationnelle. La partie logarithmique est la somme des intégrales des termes de la première catégorie et la partie rationnelle la somme des intégrales des termes de la seconde catégorie.

171. Intégration dans le cas des racines imaginaires. — Si toutes les racines ne sont pas réelles, si, par exemple, les racines a, b, ... sont imaginaires, les logarithmes qui figurent dans la formule (**2**) n'ont plus de sens, au moins jusqu'à présent, et nous verrons dans un instant par quoi il faut les remplacer. Mais il n'y a rien à changer aux autres termes de la formule d'intégration qui sont rationnels. En effet, ce sont bien des fonctions primitives des termes correspondants de la formule de décomposition, à condition de se placer au point de vue plus général de la différentiation des fonctions d'une variable complexe. D'ailleurs les imaginaires ne jouent qu'un rôle transitoire. Il suffit de faire la somme de ces termes pour rendre à l'intégrale la forme réelle. Nous allons montrer, en effet, que, x étant réel, les imaginaires se détruisent.

Les coefficients de F (x) étant réels, à toute racine imaginaire a correspond une racine conjuguée b du même degré de multiplicité. La loi de formation des coefficients de la formule de décomposition montre ensuite (nº 106) que les coefficients A_1 et B_1, A_2 et B_2,...sont deux à deux des imaginaires conjuguées. Donc les fractions qui sont écrites sur la première ligne dans la formule (2) sont les conjuguées des fractions écrites immédiatement en dessous dans la seconde ligne et, par conséquent, leur somme sera réelle.

Les termes de la seconde catégorie s'intègrent donc de la même façon que les racines a, b, ... soient réelles ou qu'elles soient imaginaires. Il n'en est plus ainsi pour les termes de la première catégorie. Lorsqu'il y en a d'imaginaires, il faut, avant d'intégrer, commencer

par ajouter deux à deux les termes conjugués. Cela fait, nous allons montrer que l'intégration se fait de suite. Soient encore a, b deux racines imaginaires conjuguées. On pourra poser

$$a = p + qi, \quad b = p - qi, \quad A_1 = M + Ni, \quad B_1 = M - Ni,$$

les quantités p, q, M, N étant réelles. Il vient alors, en ajoutant les termes conjugués,

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} = \frac{M+Ni}{x-p-qi} + \frac{M-Ni}{x-p+qi} = 2\,\frac{M(x-p) - qN}{(x-p)^2+q^2}.$$

Cette somme est réelle, et il vient

$$\int\left(\frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-b}\right)dx = M\int\frac{2(x-p)\,dx}{(x-p)^2+q^2} - 2N\int\frac{q\,dx}{(x-p)^2+q^2}.$$

Ces intégrations ont été effectuées au n° 163. On trouve

$$(3)\quad \int\left(\frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-b}\right)dx = M\,\mathrm{Log}\,[(x-p)^2+q^2] - 2N\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x-p}{q}.$$

Des résultats précédents, on conclut le théorème fondamental suivant :

172. Théorème. — *L'intégration d'une fonction rationnelle peut toujours être effectuée au moyen des fonctions élémentaires. L'intégrale se composera généralement d'une partie transcendante et d'une partie rationnelle. La fraction à intégrer étant débarrassée de sa partie entière, la partie rationnelle résulte de l'intégration des fractions simples de la seconde catégorie ; elle n'existe que si le dénominateur* $F(x)$ *a des racines multiples. La partie transcendante résulte de l'intégration des fractions simples de la première catégorie ; elle se compose exclusivement de logarithmes si* $F(x)$ *n'a que des racines réelles ; elle peut, en outre, comprendre des arcs tangentes si* $F(x)$ *a des racines imaginaires.*

173. Détermination directe de la partie rationnelle de l'intégrale. — La méthode exposée dans les numéros précédents suffit déjà pour effectuer *en pratique* l'intégration des fractions rationnelles. Mais, dans le cas où l'intégrale a une partie rationnelle, ce n'est pas celle qui donne lieu aux calculs les plus simples. En effet, la détermination des coefficients de la formule de décomposition est laborieuse dans le cas des racines multiples, surtout si ces racines sont imaginaires. La méthode que nous allons indiquer et dont le principe est dû à Hermite, permet de trouver directement la partie rationnelle de l'intégrale et d'achever le calcul par l'intégration d'une fraction rationnelle dont

le dénominateur n'a plus que des racines simples. La décomposition se fait alors très simplement par la formule générale du n° 108. Cette méthode repose sur les considérations suivantes :

Faisons la somme des termes de la première catégorie dans la formule de décomposition (1). Nous trouverons une fraction proprement dite X : P, où le polynôme P a pour valeur

(4) $$P = (x - a)(x - b) \ldots$$

D'autre part, faisons la somme de tous les termes rationnels dans le second membre de la formule d'intégration (2), nous trouverons aussi une fraction proprement dite Y : Q, où le polynôme Q a pour valeur

(5) $$Q = (x - a)^{\alpha-1}(x - b)^{\beta-1} \cdots$$

La formule d'intégration (2) peut alors s'écrire

(6) $$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \frac{Y}{Q} + \int \frac{X}{P} dx.$$

Dans cette formule, Y : Q et X : P sont des fractions proprement dites et le polynôme P n'a que des racines simples. Je dis qu'une décomposition qui possède ces caractères n'est possible que d'une seule manière.

En effet, si l'on avait deux décompositions semblables, savoir

$$\frac{Y}{Q} + \int \frac{X}{P} dx = \frac{Y_1}{Q_1} + \int \frac{X_1}{P_1} dx,$$

on en déduirait, en dérivant,

$$\left(\frac{Y}{Q} - \frac{Y_1}{Q_1}\right)' = \frac{X_1}{P_1} - \frac{X}{P}.$$

Supposons qu'on remplace chacune de ces fractions par son développement en une somme de fractions simples. Il faudra que toutes ces fractions simples se détruisent dans chaque membre. En effet, comme la dérivée d'une fraction simple est toujours une fraction de la seconde catégorie, le premier membre ne peut plus contenir après la dérivation que des fractions de la seconde catégorie, tandis que le second ne contient, par hypothèse, que des fractions de la première. Ces fractions doivent donc disparaître, car on sait que la décomposition en fractions simples n'est possible que d'une seule manière. On en conclut donc

$$\frac{Y}{Q} = \frac{Y_1}{Q_1}, \qquad \frac{X}{P} = \frac{X_1}{P_1}$$

et les deux décompositions supposées sont les mêmes.

La remarque précédente permet de déterminer directement Y : Q et X : P par la méthode des coefficients indéterminés. En effet, dérivons la formule (**6**) ; il viendra

$$(7)\qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \left(\frac{Y}{Q}\right)' + \frac{X}{P}.$$

Le polynôme Q, défini par la formule (**5**), est le plus grand commun diviseur entre F et sa dérivée et s'obtient par des calculs rationnels. Le polynôme P, défini par la formule (**4**), est le quotient de F par Q et s'obtient aussi par des calculs rationnels. Les deux polynômes P et Q étant connus, on remplacera dans la formule (**7**) X et Y par des polynômes à coefficients indéterminés, de degré immédiatement inférieurs à ceux de P et de Q respectivement. En effectuant la dérivation indiquée et en multipliant la formule (**7**) par F = PQ, il viendra

$$f(x) = PY' - Y\frac{Q'P}{Q} + QX.$$

On voit de suite, Q'P étant multiple de Q, que le second membre est un polynôme de degré immédiatement inférieur à celui de F. En égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, on aura le nombre d'équations linéaires nécessaire et suffisant pour déterminer les coefficients inconnus de X et de Y.

Remarque. — La méthode précédente permet de trouver la partie rationnelle de l'intégrale sans résoudre l'équation $F(x) = 0$. Elle met immédiatement en lumière un fait important. C'est que la partie rationnelle de l'intégrale est rationnelle non seulement par rapport à la variable x, mais aussi par rapport aux coefficients de $f(x)$ et $F(x)$. Cette même remarque s'applique à la fraction X : P, qui reste à intégrer pour obtenir la partie transcendante de l'intégrale.

174. Application. — Pour mieux faire saisir la méthode d'intégration précédente, nous allons l'éclaircir par un exemple. Soit à intégrer la fraction

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{(x^3-1)^2}.$$

Puisque $F(x)$ a des racines multiples, l'intégrale a une partie rationnelle. On commencera par la déterminer par la méthode du numéro précédent. Le polynôme Q de la théorie générale s'obtient en diminuant d'une unité l'exposant des facteurs simples de $F(x)$; il sera donc égal à $x^3 - 1$, car cette fonction n'a que des racines simples. Donc P

est aussi égal à $x^3 - 1$. Les polynômes inconnus X et Y seront, par suite, du second degré. On posera, pour les déterminer, la formule

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{ax^2+bx+c}{x^3-1} + \int \frac{dx^2+ex+f}{x^3-1}\,dx.$$

On égale les dérivées des deux membres et on chasse les dénominateurs. Il vient

$$1 = (x^3-1)(2ax+b) - 3x^2(ax^2+bx+c) + (x^3-1)(dx^2+ex+f).$$

L'identification des deux membres fournit le système d'équations :

$$d = 0, \qquad e - a = 0, \qquad f - 2b = 0,$$
$$d + 3c = 0, \qquad e + 2a = 0, \qquad f + b = -1,$$

d'où l'on tire les valeurs des coefficients inconnus :

$$d = 0, \qquad a = 0, \qquad b = -1:3,$$
$$c = 0, \qquad e = 0, \qquad f = -2:3.$$

On aura donc

$$(8) \qquad \int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{x^3-1} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3-1}.$$

On a ainsi obtenu la partie rationnelle de l'intégrale et il reste à en calculer la partie transcendante. Celle-ci exige la recherche des racines de $x^3 - 1$, qui n'a plus que des racines simples. Ces racines a, b, c, ont pour valeurs :

$$a = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = p + qi, \qquad b = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \qquad c = 1.$$

On a la formule de décomposition

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-1}.$$

Les coefficients se calculent par la règle du nº 108. La dérivée de $x^3 - 1$ étant $3x^2$ et a^3 étant égal à un, on a de suite

$$A = \frac{1}{3a^2} = \frac{a}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{6} = M + Ni$$

et, de même, $B = M - Ni$, $C = \frac{1}{3}$. Il n'y a plus qu'à appliquer la formule (**3**). On trouve

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = -\frac{1}{6}\,\mathrm{Log}\,(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$
$$+ \frac{1}{3}\,\mathrm{Log}\,(x-1) + C.$$

Portant cette valeur dans (8), il vient enfin

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{1}{3}\frac{x}{x^3-1} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9}\,\mathrm{Log}\left[\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}\right] + \mathrm{C}.$$

175. Méthode de Hermite. — Les résultats obtenus au n° 173 peuvent être établis directement par la méthode suivante, indiquée par Hermite, qui se rattache au procédé de décomposition du n° 109 et qui ne s'appuie pas sur la résolution de l'équation $F(x) = 0$.

Après avoir mis, comme au n° 109, $F(x)$ sur la forme

$$F(x) = P_1\, P_2^2\, P_3^3 \ldots,$$

où les polynômes P_1, P_2,... sont sans racines multiples, on en déduit par des calculs rationnels (n° 109)

$$(9) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{q_1}{P_1} + \frac{q_2}{P_2^2} + \frac{q_3}{P_3^3} + \cdots$$

Pour intégrer la fraction rationnelle, on aura donc à intégrer une somme de fractions proprement dites, du type général

$$\frac{q}{\mathfrak{F}^n},$$

où le polynôme $\mathfrak{F}$ n'a que des racines simples.

Cette intégration peut se faire de la manière suivante :

On observe que $\mathfrak{F}$, n'ayant que des racines simples, est premier avec sa dérivée $\mathfrak{F}'$. On déterminera donc par des calculs rationnels deux polynômes A et B, satisfaisant à la condition

$$A\,\mathfrak{F}' + B\,\mathfrak{F}^n = q.$$

On en tire

$$\int \frac{q}{\mathfrak{F}^n}\,dx = \int B\,dx + \int \frac{A\,\mathfrak{F}'}{\mathfrak{F}^n}\,dx,$$

ensuite, par une intégration par parties,

$$\int \frac{q}{\mathfrak{F}^n}\,dx = \int B\,dx - \frac{1}{n-1}\,\frac{A}{\mathfrak{F}^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{A'}{\mathfrak{F}^{n-1}}\,dx.$$

On peut abréger cette formule en convenant de représenter par $\left[\frac{m}{n}\right]$ la valeur de la fraction algébrique $\frac{m}{n}$ débarrassée de sa partie entière. Les parties entières devant se détruire dans l'équation précédente, on aura

$$\int \frac{q}{\mathfrak{F}^n}\,dx = -\frac{1}{n-1}\left[\frac{A}{\mathfrak{F}^{n-1}}\right] + \frac{1}{n-1}\int \left[\frac{A'}{\mathfrak{F}^{n-1}}\right] dx.$$

C'est une *formule de réduction* qui ramène l'intégration de la fraction proposée à celle d'une fraction de même forme mais où l'exposant n est

abaissé d'une unité. En l'appliquant de proche en proche, on pourra réduire l'exposant n jusqu'à l'unité. Il vient alors, par l'addition des parties déjà intégrées, M et N étant des polynômes,

$$\int \frac{q}{\mathfrak{F}^n}\,dx = \frac{M}{\mathfrak{F}^{n-1}} + \int \frac{N}{\mathfrak{F}}\,dx.$$

On appliquera ce procédé de calcul à chacun des termes de la formule (9) sauf le premier. On ajoutera d'une part les parties intégrées, d'autre part les fractions sous le signe d'intégration. On obtiendra le résultat trouvé au numéro précédent :

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \frac{Y}{Q} + \int \frac{X}{P}\,dx.$$

Exercices.

1. Démontrer les formules suivantes :

$$\int \frac{(x^2 - x + 2)\,dx}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{1}{3}\operatorname{Log}\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2} + C$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^4 + x^2 - 2} = \frac{1}{6}\operatorname{Log}\frac{x-1}{x+1} + \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

$$\int \frac{(3x^2 + x - 2)\,dx}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{3}{4}\operatorname{Log}\frac{x^2+1}{(x-1)^2} - \operatorname{arc\,tg} x + \frac{5x-6}{2(x-1)^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{1 - x^6} = \frac{1}{12}\operatorname{Log}\frac{(1+x)^2(1+x+x^2)}{(1-x)^2(1-x+x^2)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C.$$

2. Soit $f(x)$ un polynôme de degré $< n$; démontrer la formule

$$\int \frac{f(x)\,dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{(n-1)!}\,D_a^{n-1}\Big[f(a)\operatorname{Log}(x-a)\Big] + C.$$

R. C'est une application de la méthode de dérivation du n° 67.
On a, $P(x, a)$ désignant un polynôme de degré $< n$ par rapport à a,

$$\frac{f(x)}{x-a} = P(x, a) + \frac{f(a)}{x-a}.$$

On intègre par rapport à x, puis on dérive $(n-1)$ fois par rapport à a ; on trouve la formule proposée.

3. Soit $f(x)$ un polynôme de degré $< 2n$. On le met sous la forme $\varphi(x^2) + x\psi(x^2)$ où φ et ψ sont des polynômes en x^2. Soit $a > 0$; on aura

$$\int \frac{f(x)\,dx}{(x^2+a)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,D_a^{n-1}\left[\frac{\varphi(-a)}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{\psi(-a)}{2}\operatorname{Log}(x^2+a)\right] + C.$$

R. Solution analogue à la précédente.

§ 3. Intégration des irrationnelles algébriques.

176. On a vu dans le paragraphe précédent que l'intégration des différentielles rationnelles peut toujours se faire au moyen des fonctions élémentaires. Il n'en est plus ainsi pour les différentielles irrationnelles, sauf dans des cas particuliers. Lorsque cette intégration est possible, elle se fait généralement par l'un des deux procédés suivants : 1°) ou bien on rend la différentielle rationnelle par une substitution de variables, ce qui ramène au cas précédent ; 2°) ou bien on établit une *formule de réduction* qui fait dépendre l'intégrale cherchée d'une intégrale plus simple, celle-ci d'une autre plus simple encore, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à une intégrale connue. Nous rencontrerons d'abord des applications de la première méthode.

177. Théorème. — *Si a, b, c, d sont des constantes quelconques; α, β,... des exposants rationnels et $R(x, y, z,...)$ une fonction rationnelle de x, y, z,..., l'intégrale*

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta},\ldots\right] dx$$

est réductible par une substitution rationnelle à celle d'une différentielle rationnelle.

Soit m le plus petit commun dénominateur des fractions α, β,... et t une nouvelle variable; la substitution

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} = \varphi(t)$$

rendra la différentielle rationnelle. En effet, l'intégrale devient ainsi

$$\int R\left[\varphi(t), t^{m\alpha}, t^{m\beta},\ldots\right] \varphi'(t)\, dt$$

et la différentielle sous le signe intégrale est devenue rationnelle, car $\varphi(t)$ et, par suite, $\varphi'(t)$ sont des fonctions rationnelles de t et les exposants $m\alpha$, $m\beta$,... sont entiers. L'intégration se fera par les procédés du paragraphe précédent. On reviendra, s'il y a lieu, à la variable x par la substitution

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Dans les applications, on rencontre souvent le cas où la fraction $(ax+b):(cx+d)$ se réduit à la variable x elle-même ou à une fonction linéaire de x, comme dans les exemples suivants :

Par la substitution $x = t^6$, il vient

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{6}}} = 6\int \frac{t^3 dt}{1+t^2} = 6\int t dt - 6\int \frac{t dt}{1+t^2}$$

$$= 3t^2 - 3 \operatorname{Log}(1 + t^2) + C$$

$$= 3x^{\frac{1}{3}} - 3 \operatorname{Log}(1 + x^{\frac{1}{3}}) + C.$$

Par la substitution $x - 1 = t^2$, il vient

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}} = 2\int (t^2+1)^3 dt = 2t\left[\frac{t^6}{7} + 3\frac{t^4}{5} + t^2 + 1\right] + C$$

$$= 2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7} + \frac{3}{5}(x-1)^2 + x\right] + C.$$

178. Différentielles qui renferment la racine carrée d'un polynôme du second degré. — *Soit* $R(x, y)$ *une fonction rationnelle de* x *et de* y; *si l'on y fait*

$$y = \sqrt{a + bx + cx^2},$$

l'intégrale

$$\int R(x, y)\, dx$$

est réductible par une substitution rationnelle à celle d'une différentielle rationnelle.

La transformation doit être choisie de manière à éviter l'introduction des imaginaires quand les données sont réelles. On y arrivera par l'une des deux substitutions suivantes :

1°) Si les racines de $(a + bx + cx^2)$ sont réelles, la substitution est fournie par le théorème précédent. Soient, en effet, α et β ces deux racines, il vient

$$y = \sqrt{c(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)\sqrt{\frac{c(x-\beta)}{(x-\alpha)}}.$$

Donc y et, par suite $R(x, y)$ sont des fonctions rationnelles de x et de ce dernier radical. La rationalisation se fera par la substitution

$$\frac{c(x-\beta)}{x-\alpha} = t^2.$$

2°) Si les racines de $(a + bx + cx^2)$ sont imaginaires, le coefficient c devra être positif pour que le radical soit réel, sinon le trinôme, ayant toujours le signe de c, serait constamment négatif et sa racine imaginaire.

Donc, quand les racines sont imaginaires et, plus généralement, quand c est positif, on peut poser

$$y = t \pm x\sqrt{c},$$

d'où l'on tire, en élevant au carré et en remplaçant y^2 par sa valeur,

$$a + bx = t^2 \pm 2tx\sqrt{c}.$$

Cette relation est linéaire par rapport à x. On en tirera donc, $\rho(t)$ désignant une fonction rationnelle,

$$x = \rho(t), \qquad dx = \rho'(t)\,dt, \qquad y = t \pm \rho(t)\sqrt{c}.$$

On substituera ces trois valeurs dans l'intégrale et la fonction à intégrer sera rendue rationnelle. Après l'avoir intégrée, on remplacera t par sa valeur

$$t = \sqrt{a + bx + cx^2} \mp x\sqrt{c}.$$

Remarque. — Lorsque le coefficient a est positif, la seconde substitution s'appliquera, après avoir remplacé x par $\frac{1}{z}$, car on aura

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = \frac{\sqrt{az^2 + bz + c}}{z}$$

et le coefficient de z^2 sera positif. La différentielle sera rendue rationnelle, en posant

$$\sqrt{az^2 + bz + c} = t \pm z\sqrt{a}.$$

Cette transformation revient à poser, sans passer par l'intermédiaire de z,

$$y = \sqrt{a + bx + cx^2} = \pm\sqrt{a} + tx.$$

Donc, quand a est positif, cette dernière relation définit une *troisième substitution*, dont on peut se servir pour rendre la différentielle rationnelle.

179. Interprétation géométrique. — On peut donner une interprétation géométrique aux substitutions du numéro précédent et les comprendre dans une transformation plus générale.

Considérons la conique

$$(1) \qquad y^2 = a + bx + cx^2.$$

Il s'agit d'exprimer les coordonnées x, y de tous ses points en fonction rationnelle d'un paramètre t. A cet effet, soient μ et $\nu = \sqrt{a + b\mu + c\mu^2}$ les coordonnées d'un point fixe de la courbe. L'équation

$$(2) \qquad (y - \nu) = t(x - \mu),$$

où t est un paramètre variable, représente un faisceau de droites passant

par le point (μ, ν) et qui, par conséquent, ne rencontrent plus la courbe qu'en un seul autre point. Donc les coordonnées de ce point s'exprimeront en fonction rationelle de t. On le vérifie d'ailleurs facilement. L'équation de la conique peut s'écrire

(3) $$y^2 - \nu^2 = b(x - \mu) + c(x^2 - \mu^2)$$

Divisant les équations (2) et (3) membre à membre, il vient

(4) $$y - \nu = \frac{b + c(x + \mu)}{t}.$$

Les équations (2) et (4) forment un système d'équations du premier degré en x et y et on en tire les valeurs de x et y en fonction rationnelle de t.

Si le point (μ, ν) est un de ceux où la conique coupe l'axe des x, on trouve la première des substitutions du n° précédent. Si le point (μ, ν) est un de ceux où la conique coupe l'axe des y, on trouve la troisième.

La seconde des substitutions du n° précédent s'obtient en coupant la conique par un faisceau de droites parallèles à l'une des asymptotes

$$y = t \pm x\sqrt{c}.$$

Ces droites rencontrent la conique en un seul point, dont les coordonnées seront donc aussi des fonctions rationnelles de t.

180. Différentielles réductibles aux précédentes. — I. *Soit $R(x, y, z)$ une fonction rationnelle de x, y, z; on peut réduire aux précédentes par une substitution de variables les différentielles de la forme*

$$R\left(x, \sqrt{\frac{ax + b}{mx + n}}, \sqrt{\frac{cx + d}{mx + n}}\right) dx$$

où a, b, c, d, m, n, sont des constantes quelconques.

En effet, posons, ce qui rendra le premier radical rationnel,

$$\frac{ax + b}{mx + n} = t^2, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{nt^2 - b}{a - mt^2};$$

il viendra, en substituant cette valeur de x,

$$\frac{cx + d}{mx + n} = \frac{(cn - dm)t^2 - (cb - da)}{na - mb}.$$

Donc, si l'on exprime la différentielle proposée au moyen de t, elle ne renfermera plus d'autre irrationnalité que

$$\sqrt{(cn - dm)t^2 - (cb - da)}$$

et elle sera de la forme supposée dans le théorème précédent (n° 178).

II. *Les différentielles de la forme*

$$R\left(x, \sqrt{a + bx + cx^2}, \sqrt{A + Bx + Cx^2}\right) dx$$

sont aussi réductibles aux précédentes, pourvu que les deux trinômes $a+bx+cx^2$ *et* $A+Bx+Cx^2$ *aient une racine commune.*

En effet, en décomposant ces trinômes en leurs facteurs et en supposant que $x-\alpha$ soit le facteur commun, $(x-\beta)$ et $(x-\gamma)$ les deux facteurs différents, on a

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = (x-\alpha)\sqrt{c\,\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$$

$$\sqrt{A+Bx+Cx^2} = (x-\alpha)\sqrt{C\,\frac{x-\gamma}{x-\alpha}},$$

ce qui ramène au cas que nous venons de traiter.

181. Intégrales abéliennes. — On donne ce nom aux intégrales de la forme

$$\int R\,(x, y)\,dx,$$

où R désigne une fonction rationnelle de x et de y ; cette dernière quantité étant elle-même une fonction algébrique définie par une équation $F(x, y) = 0$.

Lorsqu'il est possible d'exprimer rationnellement les coordonnées de la courbe $F(x, y) = 0$ au moyen d'un paramètre t, on dit que la courbe est *unicursale*. On aura, dans ce cas,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Prenant t comme nouvelle variable, l'intégrale deviendra

$$\int R\,[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

et elle se déterminera sans difficulté, la différentielle étant devenue rationnelle.

Les coniques en particulier, ainsi qu'il résulte du n° 179, sont des courbes unicursales. C'est dans la théorie des courbes algébriques qu'on indique les caractères distinctifs des courbes unicursales et le moyen de trouver les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$. L'examen de cette question ne peut trouver place ici. Nous nous contenterons d'indiquer un exemple assez général.

Supposons que la fonction y soit définie par l'équation

$$\varphi_m(x, y) + \psi_{m-1}(x, y) = 0$$

où φ_m et ψ_{m-1} désignent des polynomes homogènes de degrés m et $m-1$ respectivement. Posons $y = tx$ et supprimons dans l'équation le facteur commun x^{m-1} ; elle donnera

$$x = -\frac{\psi_{m-1}(1, t)}{\varphi_m(1, t)}, \quad \text{d'où} \quad y = -t\,\frac{\psi_{m-1}(1, t)}{\varphi_m(1, t)}.$$

Ces expressions sont rationnelles. On pourra donc intégrer toute différentielle de la forme R $(x, y)\, dx$.

182. Applications de la théorie du n° 178. — I. Considérons d'abord l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}}.$$

On applique la seconde transformation ; on pose

$$\sqrt{a + bx + x^2} = t - x, \qquad \text{d'où} \qquad a + bx = t^2 - 2\,tx.$$

Différentiant la dernière relation, il vient

$$\frac{dx}{t - x} = \frac{2\,dt}{b + 2\,t}$$

et, par conséquent,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} &= \int \frac{dx}{t - x} = \text{Log}\left(\frac{b}{2} + t\right) + \text{C} \\ &= \text{Log}\left(\frac{b}{2} + x + \sqrt{a + bx + x^2}\right) + \text{C}. \end{aligned} \right.$$

On rencontre souvent le cas où $b = 0$; il vient alors

$$(2)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \text{Log}\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right) + \text{C}.$$

II. Considérons ensuite l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}}.$$

On pourrait utiliser la première transformation, mais le calcul se fait plus facilement en observant que

$$a + bx - x^2 = \left(a + \frac{b^2}{4}\right) - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2.$$

On posera, α étant une constante et t la nouvelle variable,

$$a + \frac{b^2}{4} = \alpha^2, \qquad\qquad x - \frac{b}{2} = \alpha t.$$

il viendra

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} &= \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \text{arc sin}\, t + \text{C} \\ &= \text{arc sin}\, \frac{2\,x - b}{\sqrt{b^2 + 4\,a}} + \text{C}. \end{aligned} \right.$$

III. On rencontre aussi fréquemment les intégrales

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + 1}}.$$

Elles se ramènent immédiatement aux deux précédentes par la substitution $x = 1 : z$, déjà signalée au n° 178. Il vient donc

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+1}} &= -\int \frac{dz}{\sqrt{a+bz+z^2}} \\ &= -\operatorname{Log}\left(\frac{b}{2} + \frac{1+\sqrt{ax^2+bx+1}}{x}\right) + C \end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx-1}} &= -\int \frac{dz}{\sqrt{a+bz-z^2}} \\ &= \arcsin\left(\frac{bx-2}{x\sqrt{b^2+4a}}\right) + C. \end{aligned}\right.$$

Ces dernières formules donnent lieu à deux cas particuliers fréquents, savoir

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} &= -\operatorname{Log}\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + C \\ &= \operatorname{Log}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + C \end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\arcsin\frac{1}{x} + C$$

IV. Les deux intégrales suivantes :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}, \quad \int \frac{dx}{(x-m)\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

se ramènent à celles qui précèdent en prenant respectivement comme nouvelle variable

$$z = \sqrt{\pm c}\, x, \quad z = \sqrt{\pm c}\,(x-m)$$

et l'on détermine le signe ambigu de manière que $\pm c$ soit positif.

183. Cas d'intégrabilité des différentielles binômes. — Les intégrales des différentielles binômes sont de la forme

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx$$

où a et b sont des constantes quelconques, différentes de zéro, et m, n, p des exposants rationnels, également différents de zéro.

On peut toujours admettre que la variable x est positive. En effet, si elle ne l'était pas, on commencerait par changer son signe et la forme de l'intégrale ne serait pas altérée.

Ceci posé, faisons la substitution

$$x^n = t, \qquad \text{d'où} \qquad x = t^{\frac{1}{n}}, \qquad dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt,$$

t désignant une variable positive ; l'intégrale deviendra

$$\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p\,dt.$$

Désignons par q l'exposant de t, de sorte que $q = \left(\frac{m+1}{n}-1\right)$. On est ainsi ramené à étudier l'intégrale

$$\varphi(p, q) = \int (a+bt)^p\, t^q\, dt.$$

On a alors le théorème suivant :

L'intégrale $\varphi(p, q)$ est réductible à celle d'une différentielle rationelle par le théorème du nº 177, si l'un des trois nombres p, q ou $p+q$ est un entier, positif ou négatif.

En effet, selon que p ou q sera entier, on aura immédiatement, R désignant une composante rationnelle,

$$\varphi(p, q) = \int \mathrm{R}\left[t,\, t^q\right] dt, \qquad \varphi(p, q) = \int \mathrm{R}\left[(a+bt)^p,\, t\right] dt,$$

et si $p+q$ est entier,

$$\varphi(p, q) = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q}\, dt = \int \mathrm{R}\left[\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p \cdot t\right] dt$$

ce qui ramène au théorème énoncé.

Si nous remontons maintenant à l'intégrale proposée en premier lieu et si nous observons que q est égal à $\frac{m+1}{n}-1$, nous obtenons le théorème suivant :

L'intégrale d'une différentielle binôme est réductible à celle d'une différentielle rationnelle et, par suite, l'intégration pourra se faire au moyen des fonctions algébriques, logarithmes et circulaires, si l'un des trois nombres $\frac{m+1}{n}$ ou p ou $\frac{m+1}{n}+p$ est entier.

Tchebichef a démontré [1] que, en dehors de ces trois cas d'intégrabilité pratique, l'intégrale ne pourra pas s'exprimer au moyen des fonctions élémentaires. On devra donc se borner alors à les ramener à la forme la plus simple en se servant des méthodes de réduction que nous allons indiquer.

184. Formules de réduction des intégrales de différentielles binômes. — Nous pouvons supposer que l'intégrale de la différentielle binôme ait été préalablement ramenée, par les substitutions du numéro précédent, à sa forme simplifiée

$$\varphi(p, q) = \int (a+bt)^p\, t^q\, dt.$$

[1] Sur l'intégration de différentielles irrationnelles. Journal de Liouville T. XVIII, 1853.

On a alors le théorème suivant :

Sauf les cas d'intégrabilité pratique, $\varphi(p, q)$ est réductible à des fonctions algébriques et à une autre intégrale de même forme où chacun des exposants p ou q est augmenté ou diminué d'autant d'unités qu'on le veut.

Considérons, en effet, les deux identités :

$$(a + bt)(a + bt)^p t^q = a(a + bt)^p t^q + b(a + bt)^p t^{q+1}$$

$$\mathrm{D}_t (a + bt)^{p+1} t^{q+1} = (p + 1) b (a + bt)^p t^{q+1} + (q + 1)(a + bt)^{p+1} t^q .$$

En les intégrant (ce qui revient à faire une intégration par décomposition et une intégration par parties), on obtient les deux équations correspondantes :

$$\varphi(p + 1, q) = a \varphi(p, q) + b \varphi(p, q + 1),$$

$$(a + bt)^{p+1} t^{q+1} = (p + 1) b \varphi(p, q + 1) + (q + 1) \varphi(p + 1, q).$$

Entre ces deux équations, on peut éliminer $\varphi(p + 1, q)$ ou bien $\varphi(p, q + 1)$. En résolvant alors par rapport à $\varphi(p, q)$, on trouve les deux formules :

$$(1) \qquad a \varphi(p, q) = -\frac{(a + bt)^{p+1} t^{q+1}}{p + 1} + \frac{p + q + 2}{p + 1} \varphi(p + 1, q)$$

$$(2) \qquad a \varphi(p, q) = \frac{(a + bt)^{p+1} t^{q+1}}{q + 1} - b \frac{p + q + 2}{q + 1} \varphi(p, q + 1)$$

Ces formules font dépendre $\varphi(p, q)$ d'une intégrale de même forme, mais où p ou q est augmenté d'une unité. Les deux suivantes, qu'on en déduit en les résolvant par rapport aux intégrales des seconds membres, mais en remplaçant p par $p - 1$ dans la première et q par $q - 1$ dans la seconde, savoir :

$$(3) \qquad \varphi(p, q) = \frac{(a + bt)^p t^{q+1}}{p + q + 1} + \frac{ap}{p + q + 1} \varphi(p - 1, q)$$

$$(4) \qquad b \varphi(p, q) = \frac{(a + bt)^{p+1} t^q}{p + q + 1} - \frac{aq}{p + q + 1} \varphi(p, q - 1)$$

font dépendre $\varphi(p, q)$ d'une intégrale de même forme, mais où p ou q est diminué d'une unité. Aucune des quatre dernières formules ne peut devenir illusoire, car aucun des nombres p, q, $p + q$ n'étant entier, aucun des dénominateurs $p + 1$, $q + 1$, $p + q + 1$ ne peut être nul.

L'emploi des formules (1), (2), (3), (4), permet donc d'augmenter ou de diminuer d'autant d'unités qu'on le veut un des deux exposants p ou q, sans toucher à l'autre. On pourra donc, de proche en proche, faire dépendre $\varphi(p, q)$ d'une autre intégrale de même forme, mais où

p et q seront compris entre deux entiers consécutifs choisis à volonté, par exemple 0 et 1. Comme elle n'est plus susceptible de réduction ultérieure, on devra la considérer comme une nouvelle transcendante.

185. Usage des formules de réduction dans les cas d'intégrabilité pratique. — Dans les cas d'intégrabilité pratique, les formules de réduction peuvent devenir illusoires. Mais cette éventualité ne se présente que pour des valeurs exceptionnelles de p ou de q et les formules peuvent servir, dans beaucoup de cas, à simplifier ou même à effectuer l'intégration. Nous allons en donner des exemples.

Nous pouvons toujours supposer, dans le cas d'intégrabilité, que ce soit l'un des exposants p ou q qui est entier. En effet, si $p+q$ était entier, on ferait la substitution $t = 1 : z$. Il viendrait

$$\varphi(p, q) = -\int z^{-p-q-2}(b + az)^{p}\, dz,$$

ce qui ramènerait au cas précédent.

Supposons, en premier lieu, que les exposants p et q soient entiers tous les deux; je dis qu'on pourra les réduire tous les deux à l'une des valeurs 0 ou -1. En effet, si les deux exposants p, q sont négatifs, on les ramènera à -1 par l'emploi des formules (**1**) ou (**2**), qui ne deviennent illusoires que si $p+1=0$ ou si $q+1=0$. Si un seul des exposants p, q est négatif, on commencera par le réduire à -1; après cela, on pourra abaisser l'autre à zéro par les formules (**3**) ou (**4**). Celles-ci ne seront pas illusoires, car $p+q+1$ ne s'annulera pas au cours de la réduction. Enfin, si p et q sont tous deux positifs, les formules (**3**) et (**4**) permettent de les réduire tous deux à zéro. Dans ces divers cas, le calcul de l'intégral réduite sera devenu immédiat.

Supposons, en second lieu, qu'un seul des exposants p ou q soit entier. On voit alors immédiatement que les formules ne deviennent illusoires que si l'on veut réduire l'exposant entier de -1 à 0. Donc elles pourront toujours servir à réduire l'exposant entier à 0 s'il est positif et à -1 s'il est négatif. Dans le premier cas, l'intégration sera immédiate. Dans le second cas, elle sera simplifiée, mais on devra l'achever par les méthodes de rationalisation. Ces diverses circonstances se présentent dans les applications suivantes :

I. Considérons d'abord la différentielle binôme

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{p}}$$

où p est entier et positif. Par la substitution $x = \sqrt{t}$, il vient

$$2\int \frac{dx}{(1+x^2)^p} = \int (1+t)^{-p} t^{-\frac{1}{2}} dt = \varphi\left(-p, -\frac{1}{2}\right)$$

Donc l'emploi de la formule de réduction (1) permettra de réduire l'exposant p à 1. Il viendra ensuite, ce qui terminera le calcul,

$$\int \frac{t^{-\frac{1}{2}} dt}{(1+t)} = 2\int \frac{dx}{1+x^2} = 2 \operatorname{arc\,tg} x + \mathrm{C}.$$

Il est clair d'ailleurs que la formule de réduction (1) peut être exprimée directement au moyen de x. On trouve alors, en remplaçant t par x^2 dans cette formule et en divisant par 2, la formule de réduction suivante, qu'il est facile d'établir directement :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^p} = \frac{1}{2p-2} \frac{x}{(1+x^2)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2p-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{p-1}}.$$

II. Considérons maintenant l'intégrale

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

dans laquelle m désigne un entier positif ou négatif. Par la substitution $x^2 = t$, on aura

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \int (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{m-1}{2}} dt = \frac{1}{2} \varphi\left(-\frac{1}{2}, \frac{m-1}{2}\right).$$

Suivant que m sera positif ou négatif, on se servira de la formule (4) ou de la formule (2). Elles permettent de ramener l'exposant $\frac{m-1}{2}$ à la valeur $-\frac{1}{2}$ si m est pair et à l'une des valeurs 0 ou -1 selon que m est impair positif ou négatif. Alors m aura une des valeurs 0, 1 et -1. En revenant à la variable x, on aura à effectuer une des trois intégrations

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}},$$

qui ont pour valeurs, à une constante près,

$$\arcsin x, \qquad -\sqrt{1-x^2}, \qquad \operatorname{Log} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x},$$

la dernière ayant été calculée au nº 182.

III. Dans la théorie du pendule, on rencontre l'intégrale

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

Ce n'est plus une intégrale binôme, mais on la ramène, à son choix, à l'une des deux intégrales binômes considérées ci-dessus. En effet, si l'on pose les relations

$$x = at^2, \qquad \sqrt{ax - x^2} = xz,$$

on trouvera, après quelques réductions faciles,

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax - x^2}} = 2\,a^m \int \frac{t^{2m}\,dt}{\sqrt{1 - t^2}} = -\,2\,a^m \int \frac{dz}{(1 + z^2)^{m+1}}.$$

Ce qui ramène, en même temps, l'une à l'autre les deux intégrales précédentes.

186. Cas particuliers simples des intégrales binômes. — Parmi les cas d'intégrabilité pratique de l'intégrale $\varphi\,(p, q)$, il y en trois que l'on peut considérer comme des *cas d'intégrabilité facile*. Ce sont ceux où l'une des quantités p, q ou $-\,(p + q + 2)$ est un entier positif.

En effet : 1°) Si p est entier et positif, en développant $(a + bt)^p$ par la formule du binôme, l'intégrale

$$\int (a + bt)^p\,t^q\,dt$$

se calculera immédiatement par décomposition. 2°) Si q est un entier positif, on prendra $a + bt$ pour variable, ce qui ramènera au cas précédent. 3°) Si $p + q + 2$ est un entier négatif, la substitution $t = 1 : z$, considérée au début du numéro précédent, ramènera au cas que nous venons d'examiner. Dans ces divers cas, l'emploi de la formule de réduction sera donc rarement avantageux.

En particulier, dans l'application II du numéro précédent, le troisième *cas d'intégrabilité facile* se rencontre si m est pair et négatif.

Exercices.

1. Intégrales à calculer par le théorème du n° 177 :

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x - 1}} \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx}} \qquad \int \frac{1 + x^{\frac{1}{3}}}{1 + x^{\frac{1}{4}}}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x - 1}} \qquad \int (a + x)^{\frac{2}{3}}\,x^3\,dx \qquad \int \frac{x\,dx}{(1 + x)^{\frac{1}{3}} - (1 + x)^{\frac{1}{2}}}$$

2. Intégrales à calculer par le théorème du n° 178.

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ arc tg } \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ Log} \frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} = -2 \text{ arc tg} \frac{\sqrt{1+x-x^2}-(1+x)}{x} + C.$$

3. Différentielles binômes à intégrer.

$$\int \frac{x^4 dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x(x^2-3)}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{2} \text{ arc sin } x + C$$

$$\int x^3 (a+x^2)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{14} (a+x^2)^{\frac{4}{3}} \left(x^2 - \frac{3a}{4}\right) + C$$

4. Montrer que toute différentielle binôme $x^m(a+bx^n)^p dx$ peut, à part un facteur constant, se ramener à la forme

$$\sin^{\mu}\varphi \cos^{\nu}\varphi \, d\varphi,$$

où μ et ν sont des exposants rationnels.

R. On y arrivera par l'une des trois substitutions suivantes : Si $(a+bx^n)$ et a sont de même signe, on posera

$$\frac{a+bx^n}{a} = \cos^2\varphi \text{ ou } \frac{1}{\cos^2\varphi},$$

selon que le premier membre est $<$ ou $>$ 1. Si $(a+bx^n)$ et a sont de signes contraires, on posera

$$\frac{a+bx^n}{a} = -\text{tg}^2\varphi.$$

§ 4. Intégration des fonctions transcendantes.

187. Rationalisation. — Un grand nombre de différentielles, qui renferment des fonctions exponentielles et circulaires ou leurs inverses, peuvent être rendues rationnelles par un changement de variables. Elles se ramènent alors à la forme

$$R(u)\, du$$

où R désigne une fonction rationnelle.

Il y a des cas simples où la substitution qui conduit à ce résultat est immédiatement apparente dans la différentielle proposée. Telles sont les différentielles

$$R(e^x)\, e^x dx, \qquad R(\text{Log } x)\frac{dx}{x}, \qquad R(\text{arc tg } x)\frac{dx}{1+x^2}, \text{ etc.}$$

qui se ramènent à la forme indiquée par les substitutions

$$e^x = u \qquad \text{Log}\, x = u \qquad \text{arc tg}\, x = u, \text{ etc...}$$

Mais on peut aussi rendre rationnelles des différentielles, pour lesquelles la substitution convenable est moins facile à apercevoir et nous allons en examiner quelques types généraux.

188. Différentielles de la forme R (sin x, cos x) dx. — Plusieurs substitutions différentes peuvent servir à rendre rationnelles les différentielles de cette forme où R désigne une composante rationnelle. Avant de faire connaître ces substitutions, nous établirons le théorème purement algébrique que voici :

Toute fonction rationnelle de deux variables R (x, y) *peut se ramener à la forme*

$$A + Bx + Cy + Dxy$$

où A, B, C, D, *sont des fonctions rationnelles de* x^2 *et de* y^2.

En effet, remarquons que R est le quotient P : Q de deux polynômes et considérons l'égalité

$$R = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{P(x, y)\, Q(-x, y)\, Q(x, -y)\, Q(-x, -y)}{Q(x, y)\, Q(-x, y)\, Q(x, -y)\, Q(-x, -y)}.$$

Le dénominateur du second membre est un polynôme. Quand on aura effectué les multiplications et les réductions, ce polynôme ne contiendra plus que des puissances paires de x et de y, car il reste inaltéré par le changement de x en $-x$ et aussi par celui de y en $-y$. Désignons ce polynôme par Q_1.

Effectuons aussi les multiplications indiquées au numérateur et considérons le nouveau polynôme ainsi obtenu. Soient :

1° A_1 la somme des termes de ce polynôme où x et y ont des exposants pairs (et nous comprenons l'exposant 0 dans ce cas) ;

2° B_1x la somme de ceux où y a un exposant pair et x un exposant impair ;

3° C_1y la somme de ceux où x a un exposant pair et y un exposant impair ;

4° D_1xy la somme de tous les autres termes où x et y auront donc des exposants impairs.

Toutes les quantités A_1, B_1, C_1, D_1 et Q_1 seront encore des polynômes, mais qui ne contiendront plus que des puissances paires de x et de y. Or on a

$$R = \frac{P}{Q} = \frac{A_1 + B_1x + C_1y + D_1xy}{Q_1}.$$

et ce résultat est equivalent au théorème énoncé :

Remplaçons maintenant x et y par $\sin x$ et $\cos x$ et considérons la différentielle

$$R(\sin x, \cos x)\, dx.$$

Voici les principales substitutions qui permettent de la rendre rationnelle :

I. *Si* R *est une fonction impaire de* $\cos x$, *c'est-à-dire une fonction qui ne fait que changer de signe quand on y remplace* $\cos x$ *par* $-\cos x$, *on rendra* R dx *rationnelle par la substitution*

$$\sin x = z.$$

En effet, R peut se mettre par le théorème précédent sous la forme

$$R = A + B\cos x + C\sin x + D\sin x\cos x,$$

où A, B, C, D ne dépendent que de $\sin^2 x$, $\cos^2 x$. Pour que R change simplement de signe quand on remplace $\cos x$ par $-\cos x$, il faut que A et C soient nuls. Donc

$$R = (B + D\sin x)\cos x = R_1(\sin x, \cos^2 x)\cos x,$$

R_1 désignant une nouvelle fonction rationnelle. Par la substitution proposée, il viendra

$$R\, dx = R_1(z, 1 - z^2)\, dz$$

et la différentielle est rendue rationnelle.

II. *Si* R *est une fonction impaire de* $\sin x$, *on rendra* R dx *rationnelle par la substitution*

$$\cos x = z.$$

On aura, en effet,

$$R = (C + D\cos x)\sin x = R_1(\sin^2 x, \cos x)\sin x$$
$$R\, dx = -R_1(1 - z^2, z)\, dz.$$

III. *Si* R $(\sin x, \cos x)$ *ne change pas quand on remplace à la fois* $\sin x$ *par* $-\sin x$ *et* $\cos x$ *par* $-\cos x$ *(auquel cas nous disons que* R *est une fonction paire de* $\sin x$, $\cos x$*)*, R dx *sera rendue rationnelle par la substitution*

$$\operatorname{tg} x = z.$$

En effet, dans ce cas, B et C doivent être nuls et l'on a

$$R = A + D\sin x\cos x = R_1(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cos x).$$

Mais on a

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{z^2}{1 + z^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + z^2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{z}{1 + z^2}$$

$$dx = d \operatorname{arc tg} z = \frac{dz}{1 + z^2}$$

Toutes ces quantités sont rationnelles. Si on les substitue dans R dx, on obtiendra donc une expression rationnelle.

IV. *Dans tous les cas*, R ($\sin x$, $\cos x$) dx *sera rendue rationnelle par la substitution*

$$z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

On a, en effet,

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}, \qquad \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans R, on obtiendra une fonction paire de $\sin \frac{x}{2}$, $\cos \frac{x}{2}$ et la substitution proposée rendra R dx rationnelle en vertu du théorème III. On trouve d'ailleurs immédiatement

$$\sin x = \frac{2z}{1 + z^2}, \qquad \cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \qquad dx = \frac{2\,dz}{1 + z^2}.$$

et ces trois valeurs sont rationnelles. En les substituant dans R dx, cette différentielle sera rendue rationnelle.

Remarque. — En général, mais ce n'est pas une règle absolue, on n'aura pas avantage à se servir de la substitution IV si l'une des trois premières peut s'appliquer. Quand on aura une différentielle à intégrer, on aura donc soin de vérifier qu'aucune des autres substitutions ne peut servir avant de recourir à la dernière.

D'ailleurs la dernière substitution n'est jamais nécessaire pour effectuer l'intégration et elle peut toujours être évitée. En effet, si l'on décompose R par la formule considérée plus haut, il vient

$$\text{R}\,dx = (\text{A} + \text{B} \sin x + \text{C} \cos x + \text{D} \sin x \cos x)\,dx$$

où A, B, C, D ne dépendent plus que de $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$.

Mais chacun des termes de cette différentielle peut être rendu rationnel par une des trois premières substitutions :

A dx par la substitution III,

B $\sin x \, dx$ par la substitution II,

C $\cos x \, dx$ par la substitution I,

D $\sin x \cos x \, dx$ par l'une quelconque des trois précédentes.

189. Applications. — I. L'emploi des substitutions (I) ou (II) conduit aux formules suivantes :

$$\int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = \text{Log} \sin x + C \qquad \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = -\text{Log} \cos x + C.$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C.$$

II. L'emploi de la substitution III conduit à

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \text{Log} \, \text{tg} \, x + C.$$

III. L'emploi de la substitution (IV) à

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \text{Log} \, \text{tg} \frac{x}{2} + C$$

et, en y remplaçant x par $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \text{Log} \, \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

IV. Passons à un exemple plus compliqué. Considérons l'intégrale

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x}.$$

Aucune des trois premières substitutions n'est applicable ; nous emploierons donc la dernière. Posons

$$u = \text{tg} \frac{x}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \qquad dx = \frac{2 \, du}{1 + u^2}.$$

L'intégrale proposée deviendra

$$\int \frac{2 \, du}{(a + b) + (a - b) u^2}.$$

En changeant au besoin le signe de l'intégrale, on peut toujours admettre que $(a + b)$ est positif, alors $(a - b)$ est positif ou négatif.

Si $a - b$ est > 0, posons $a + b = \alpha^2$, $a - b = \beta^2$; on aura

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \int \frac{2 \, du}{\alpha^2 + \beta^2 u^2} = \frac{2}{\alpha \beta} \text{arc tg} \frac{\beta u}{\alpha} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \text{arc tg} \left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \, \text{tg} \frac{x}{2}\right) + C.$$

Si $a - b$ est < 0, posons $a + b = \alpha^2$, $a - b = -\beta^2$; il viendra

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \int \frac{2\,du}{\alpha^2 - \beta^2 u^2} = \frac{1}{\alpha\beta} \operatorname{Log} \frac{\alpha + \beta u}{\alpha - \beta u} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{b + a} + \sqrt{b - a} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{b + a} - \sqrt{b - a} \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{Log} \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a + b \cos x} + C.$$

V. On ramène à la précédente l'intégrale

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x}$$

Pour cela, on détermine deux quantités r et φ par les relations

$$b = r \cos \varphi, \qquad c = r \sin \varphi,$$

ce qui ramène l'intégrale à la forme

$$\int \frac{dx}{a + r \cos (x - \varphi)}$$

Sa valeur s'obtiendra en remplaçant b par r et x par $x - \varphi$ dans les résultats précédents.

Remarques. — Dans les applications, on rencontre souvent des différentielles renfermant d'autres lignes trigonométriques que $\sin x$ et $\cos x$, comme $\operatorname{tg} x$, $\sec x$, etc... Il faut alors commencer par exprimer rationnellement ces nouvelles lignes au moyen de $\sin x$ et de $\cos x$ pour pouvoir appliquer les théorèmes généraux.

Dans d'autres cas, la différentielle proposée renferme, outre $\sin x$ et $\cos x$, des sinus et des cosinus de multiples entiers de x, comme $\sin 2x$, $\sin 3x$, $\cos 2x$, etc. On doit aussi commencer par les exprimer en fonction de $\sin x$ et de $\cos x$ et ces expressions sont, comme on le sait, des polynômes. Cela fait, on pourra appliquer les méthodes générales.

Enfin, il arrive encore que la différentielle à intégrer renferme non seulement $\sin x$ et $\cos x$, mais aussi $\sin \alpha x$, $\sin \beta x$, $\cos \gamma x$, etc., α, β, γ,... désignant des nombres rationnels. Soit, dans ce cas, m le plus petit commun dénominateur de α, β, γ,... On pose $x = mz$ et on prend z comme nouvelle variable, ce qui ramène au cas précédent.

190. Intégration des différentielles de la forme $\sin^m x \cos^n x\,dx$ (**m et n entiers, nuls ou positifs**). — I. Si l'un des nombres m ou n est

impair, l'intégration se fait très simplement par les méthodes générales de rationalisation (n° 188). Si m est impair, soit $m = 2k + 1$; on pose

$$\cos x = z$$

et il vient

$$\sin^m x \cos^n x \, dx = - (1 - z^2)^k z^n \, dz.$$

On développe par la formule du binôme et chaque terme du développement est immédiatement intégrable. Dans ce cas, l'intégrale sera donc un polynôme en $\cos x$.

Si n est impair, on pose $\sin x = z$ et les calculs s'achèvent comme dans le cas précédent. Seulement l'intégrale sera un polynôme en $\sin x$.

II. Dans tous les cas, on peut, par les formules de la trigonométrie, exprimer $\sin^m x$ et $\cos^n x$ par des sommes de sinus et de cosinus de multiples de x [1]. En effectuant la multiplication, on trouvera des

[1] Ces formules se déduisent facilement de celle de Moivre. On part de l'identité

$$2 \cos x = (\cos x + i \sin x) + (\cos x - i \sin x).$$

On élève à la puissance n par la formule du binôme, mais en ayant égard aux relations

$$(\cos x + i \sin x)^p = \cos px + i \sin px.$$
$$(\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) = 1.$$

Il vient facilement

$$2^n \cos^n x = (\cos nx + i \sin nx) + n [\cos (n-2) x + i \sin (n-2) x]$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2} [\cos (n-4) x + i \sin (n-4) x] + \cdots$$

En négligeant les termes imaginaires, qui se détruisent, on trouve l'expression cherchée pour $\cos^n x$:

$$2^n \cos^n x = \cos nx + n \cos (n-2) x + \frac{n(n-1)}{2} \cos (n-4) x + \cdots$$

Les coefficients sont ceux du binôme, de sorte que les termes à égale distance des extrêmes sont égaux dans cette formule.

Le développement analogue de $\sin^n x$ se déduit du précédent, en y changeant x en $x + \pi : 2$. Il est de l'une des deux formes suivantes, suivant que n est pair ou impair :

$$2^n \sin^n x = (-1)^{\frac{n}{2}} \left[\cos nx - n \cos (n-2) x + \frac{n(n-1)}{2} \cos (n-4) x - \cdots\right]$$

$$2^n \sin^n x = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[\sin nx - n \sin (n-2) x + \frac{n(n-1)}{2} \sin (n-4) x - \cdots\right]$$

Dans les deux cas, les termes à égale distance des extrêmes seront encore égaux.

produits partiels, qui pourront se décomposer eux-mêmes par les formules :

$$\sin \lambda x \sin \mu x = \frac{1}{2}\left[\cos(\lambda - \mu)x - \cos(\lambda + \mu)x\right]$$

$$\sin \lambda x \cos \mu x = \frac{1}{2}\left[\sin(\lambda + \mu)x + \sin(\lambda - \mu)x\right]$$

$$\cos \lambda x \cos \mu x = \frac{1}{2}\left[\cos(\lambda + \mu)x + \cos(\lambda - \mu)x\right]$$

et ces nouveaux termes sont immédiatement intégrables.

III. Lorsque m et n sont pairs tous deux, le procédé suivant, qui ne demande aucun effort de mémoire, est souvent préférable en pratique au précédent. Posons $m = 2p$, $n = 2q$.

Si p est $> q$ ou si $p = q$, on écrit

$$\sin^{2p} x \cos^{2q} x = \sin^{2p-2q} x (\sin x \cos x)^{2q} = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^{p-q} \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2q}$$
$$= \frac{(1 - \cos 2x)^{p-q} \sin^{2q} 2x}{2^{p+q}}.$$

Si p est $< q$, on écrit

$$\sin^{2p} x \cos^{2q} x = (\sin x \cos x)^{2p} \cos^{2q-2p} x = \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2p} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^{q-p}$$
$$= \frac{(\sin 2x)^{2p} (1 + \cos 2x)^{q-p}}{2^{p+q}}.$$

On développe par la formule du binôme et on est ramené à une somme de termes de la forme $\sin^{\lambda} 2x \cos^{\mu} 2x$, mais où $\lambda + \mu$ ne peut surpasser $p + q$. Ceux où l'un des exposants λ ou μ est impair s'intègrent facilement par la méthode I. Pour les autres termes, on recommencera la même décomposition et les nouveaux éléments seront de la forme $\sin^{\lambda} 4x \cos^{\mu} 4x$. On continue ainsi de suite jusqu'à ce que tous les termes puissent s'intégrer. La réduction marche d'ailleurs rapidement, puisque la somme $\lambda + \mu$ des exposants est réduite *au moins de moitié* dans les termes qui résultent de chaque nouvelle décomposition.

IV. On peut aussi se servir pour intégrer la différentielle proposée de formules de réduction. Mais nous les ferons connaître dans le paragraphe suivant.

191. Intégration de $E(x)\, e^{ax} dx$. — Cette différentielle, dans laquelle $E(x)$ désigne un polynôme, s'intègre le plus facilement par la formule d'intégration par parties. On a

$$\int \mathrm{E}(x)\, e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{E}(x)\, e^{ax} - \frac{1}{a}\int \mathrm{E}'(x)\, e^{ax}\, dx.$$

Cette formule fait dépendre l'intégrale proposée d'une autre de même forme, mais où le degré du polynôme est abaissé d'une unité. C'est une formule de réduction. En l'appliquant de proche en proche, il viendra

$$\int \mathrm{E}(x)\, e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a}\left[\mathrm{E}(x) - \frac{\mathrm{E}'(x)}{a} + \frac{\mathrm{E}''(x)}{a^2} - \cdots\right]$$

Cette formule s'arrête d'elle-même quand les dérivées deviennent identiquement nulles.

Remarque. — On peut trouver une expression symbolique élégante de l'intégrale précédente. Décomposons-la en une somme d'autres, ne renfermant qu'un seul terme du polynôme $\mathrm{E}(x)$. Chacune de celles-ci peut s'intégrer par la formule symbolique (4) du n° (167) ; on a ainsi, pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$,

$$\int x^n\, e^{ax}\, dx = \mathrm{D}_a^n \frac{e^{ax}}{a} + \mathrm{C}.$$

Donc, si l'on multiplie chacune de ces formules par le coefficient de x^n dans $\mathrm{E}(x)$ et si l'on fait leur somme, on trouvera l'équation suivante, remarquable par sa concision :

$$\int \mathrm{E}(x)\, e^{ax}\, dx = \mathrm{E}(\mathrm{D}_a)\, \frac{e^{ax}}{a} + \mathrm{C}.$$

192. Intégration de $\mathrm{E}(x) \sin ax\, dx$ et de $\mathrm{E}(x) \cos ax\, dx$. — Ces différentielles, dans lesquelles $\mathrm{E}(x)$ désigne encore un polynôme, s'intègrent par parties et s'obtiennent par un calcul analogue au précédent.

En effectuant une première intégration par parties, on trouve :

$$\int \mathrm{E}(x) \cos ax\, dx = \mathrm{E}(x)\,\frac{\sin ax}{a} - \frac{1}{a}\int \mathrm{E}'(x)\,\sin ax\, dx,$$

$$\int \mathrm{E}(x) \sin ax\, dx = -\,\mathrm{E}(x)\,\frac{\cos ax}{a} + \frac{1}{a}\int \mathrm{E}'(x)\cos ax\, dx.$$

Ces deux formules ensemble fournissent une méthode de réduction. En les employant alternativement, il vient :

$$\int \mathrm{E}(x) \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a}\left[\mathrm{E}(x) - \frac{\mathrm{E}''(x)}{a^2} + \frac{\mathrm{E}^{\mathrm{IV}}(x)}{a^4} - \cdots\right]$$
$$+ \frac{\cos ax}{a}\left[\frac{\mathrm{E}'(x)}{a} - \frac{\mathrm{E}'''(x)}{a^3} + \frac{\mathrm{E}^{\mathrm{V}}(x)}{a^5} - \cdots\right] + \mathrm{C}$$

$$\int \mathrm{E}(x) \sin ax\, dx = \frac{\sin ax}{a}\left[\frac{\mathrm{E}'(x)}{a} - \frac{\mathrm{E}'''(x)}{a^3} + \frac{\mathrm{E}^{\mathrm{V}}(x)}{a^5} - \cdots\right]$$
$$- \frac{\cos ax}{a}\left[\mathrm{E}(x) - \frac{\mathrm{E}''(x)}{a^2} + \frac{\mathrm{E}^{\mathrm{IV}}(x)}{a^4} - \cdots\right] + \mathrm{C}.$$

193. Intégration de $x^n e^{ax} \cos bx\, dx$ et de $x^n e^{ax} \sin bx\, dx$. — On a

$$d\,(e^{ax} \cos bx) = e^{ax}\,(a \cos bx - b \sin bx)\, dx,$$
$$d\,(e^{ax} \sin bx) = e^{ax}\,(b \cos bx + a \sin bx)\, dx.$$

On en tire

$$a\, d\,(e^{ax} \sin bx) - b\, d\,(e^{ax} \cos bx) = (a^2 + b^2)\, e^{ax} \sin bx\, dx,$$
$$b\, d\,(e^{ax} \sin bx) + a\, d\,(e^{ax} \cos bx) = (a^2 + b^2)\, e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Il viendra donc, en intégrant,

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}\,(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + \mathrm{C},$$
$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}\,(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + \mathrm{C}.$$

Les intégrales plus générales, proposées dans le titre, se déduisent des précédentes par la méthode de dérivation. En dérivant n fois par rapport à a, il vient

$$\int x^n e^{ax} \sin bx\, dx = \mathrm{D}_a^n\, \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + \mathrm{C},$$
$$\int x^n e^{ax} \cos bx\, dx = \mathrm{D}_a^n\, \frac{e^{ax}\,(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + \mathrm{C}.$$

194. Différentielles réductibles aux précédentes. — I. *On peut réduire aux précédentes et, par conséquent, intégrer les différentielles de la forme générale*

$$\mathrm{E}\,(x, e^{ax}, \sin bx, \cos cx)\, dx$$

où $\mathrm{E}\,(x, y, \ldots)$ *désigne un polynôme en* $x, y, \ldots$ *et* a, b, c *des constantes quelconques.*

En effet, ces différentielles se réduisent à une somme d'autres de la forme

$$x^m e^{nax} \sin^p bx \cos^q cx\, dx.$$

On peut remplacer $\sin^p bx$ et $\cos^q cx$ par des sommes de sinus et de cosinus de multiples de bx ou de cx. Donc le produit $\sin^p bx \cos^q cx$ se décomposera en une somme de produits partiels des diverses formes :

$$\sin \lambda x \sin \mu x, \qquad \sin \lambda x \cos \mu x, \qquad \cos \lambda x \cos \mu x.$$

Ceux-ci se décomposent eux-mêmes en une somme de sinus ou de cosinus par les formules indiquées au n° 190, II. De sorte que, par ces décompositions, la différentielle proposée se partagera en une somme d'autres des divers types :

$$x^m e^{nax}\, dx, \qquad x^m e^{nax} \sin px\, dx, \qquad x^m e^{nax} \cos px\, dx,$$

où m, n sont des entiers nuls ou positifs et a, p des constantes quelconques. Tous ces types de différentielles ont été intégrés dans les numéros précédents.

II. *On peut aussi ramener aux précédentes et, par conséquent, intégrer les différentielles des divers types :*

$$\mathrm{E}\,(x, \operatorname{Log} x)\, dx, \qquad \mathrm{E}\,(x, \arcsin x)\, dx, \qquad \mathrm{E}\,(x, \arccos x)\, dx$$

où $\mathrm{E}\,(x, y)$ *est un polynôme en* x, y.

En effet, par les substitutions respectives

$$\operatorname{Log} x = z, \qquad \arcsin x = z, \qquad \arccos x = z,$$

ces différentielles deviendront

$$\mathrm{E}\,(e^z, z)\, e^z\, dz, \qquad \mathrm{E}\,(\sin z, z) \cos z\, dz \qquad -\mathrm{E}\,(\cos z, z) \sin z\, dz$$

et elles rentreront dans la forme générale supposée dans le théorème précédent.

III. *Les différentielles de la forme*

$$\mathrm{E}\,(\sin x, \cos x) \operatorname{Log} \mathrm{R}\,(\sin x, \cos x)\, dx$$

dans lesquelles E *désigne un polynôme et* R *une fraction rationnelle en* $\sin x$ *et* $\cos x$ *pourront s'intégrer par les fonctions élémentaires, si le polynôme* E *est une fonction impaire d'une des deux variables* $\sin x$ *ou* $\cos x$.

En effet, il résulte de la remarque faite au n° 190, I, qui s'applique à chacun de ses termes, que $\mathrm{E}\,(\sin x, \cos x)$ sera la dérivée d'un polynôme en $\cos x$ ou d'un polynôme en $\sin x$. Pour fixer les idées, supposons que ce soit le premier cas et désignons par $\mathrm{E}_1\,(\cos x)$ ce polynôme. En intégrant par parties, on trouvera

$$\int \mathrm{E} \operatorname{Log} \mathrm{R}\, dx = \mathrm{E}_1 \log \mathrm{R} - \int \mathrm{E}_1 \frac{\mathrm{D}_x \mathrm{R}}{\mathrm{R}}\, dx.$$

Cette formule fait dépendre l'intégrale proposée d'une autre dans laquelle la fonction sous le signe d'intégration sera rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$. Celle-ci s'obtiendra donc par les méthodes indiquées précédemment.

Exercices.

Démontrer les relations suivantes :

$$\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x \right) + \mathrm{C}.$$

$$\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x}\, dx = \operatorname{Log}\,(2 + \cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + \mathrm{C}.$$

$$\int \frac{(1 - r \cos x)\, dx}{1 - 2r \cos x + r^2} = \frac{x}{2} + \text{arc tg}\left(\frac{1+r}{1-r} \text{tg} \frac{x}{2}\right) + C.$$

$$\int \sin^5 x\, dx = -\cos x \left(1 - \frac{2}{3}\cos^2 x + \frac{1}{5}\cos^4 x\right) + C.$$

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2^4}\left[x - \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin^3 2x}{3}\right] + C.$$

$$\int x^4 \cos x\, dx = + \sin x\,(x^4 - 12x^2 + 24) + \cos x\,(4x^3 - 24x) + C.$$

$$\int e^{ax} \cos^2 x\, dx = \frac{e^{ax}}{a(a^2+4)}(a^2 \cos^2 x + 2a \sin x \cos x + 2) + C.$$

$$\int e^{ax} \sin^2 x\, dx = \frac{e^{ax}}{a(a^2+4)}(a^2 \sin^2 x - 2a \sin x \cos x + 2) + C.$$

$$\int x^n \operatorname{Log} x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\operatorname{Log} x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

$$\int (\operatorname{Log} x)^n dx = x\,[(\operatorname{Log} x)^n - n(\operatorname{Log} x)^{n-1} + n(n-1)(\operatorname{Log} x)^{n-2} - \cdots] + C.$$

$$\int (\text{arc} \sin x)^2 dx = x\,[(\text{arc} \sin x)^2 - 2] + 2\,(\text{arc} \sin x)\sqrt{1 - x^2} + C.$$

$$\int \sin mx \operatorname{Log} \cos nx\, dx = -\frac{\cos mx}{m} \operatorname{Log} \cos nx - \frac{n}{m}\int \frac{\cos mx}{\cos nx} \sin nx\, dx.$$

§ 5. Etude particulière de la différentielle $\sin^m x \cos^n x dx$, m et n étant des entiers positifs ou négatifs.

195. Réduction aux différentielles binômes. — La différentielle

$$\sin^m x \cos^n x\, dx$$

se transforme immédiatement dans une différentielle binôme de la forme simplifiée par la substitution

$$\sin x = \sqrt{t}\,, \quad \text{d'où} \quad \cos x = \sqrt{1 - t}, \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)}}.$$

Elle devient ainsi

$$t^{\frac{m-1}{2}} (1 - t)^{\frac{n-1}{2}} dt.$$

Nous avons établi (n° 184) pour intégrer cette différentielle binôme des formules de réduction, qui suffisent pour effectuer l'intégration. Mais il est préférable d'exprimer immédiatement ces formules de réduction en fonction de $\sin x$ et de $\cos x$. C'est ce que nous allons faire dans le numéro suivant :

196. Formules de réduction. — On a, par une décomposition évidente,

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^{m-1} x\, (\cos^n x \sin x\, dx)\,;$$

d'où, en intégrant par parties,

$$(1)\quad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\, dx.$$

D'autre part, si l'on fait porter l'intégration sur le sinus après avoir isolé un facteur cos x, on aura

$$(2)\quad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx.$$

Dans l'intégrale qui est au second membre de la formule (**1**), remplaçons un facteur $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$. Cette intégrale se décomposera en deux autres dont l'une reproduit celle du premier membre. En résolvant l'équation par rapport à cette intégrale, il viendra

$$(3)\quad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx.$$

Opérons de même sur l'équation (**2**), mais en remplaçant un facteur $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, il viendra

$$(4)\quad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx$$

Enfin, changeons m en $m+2$ dans la formule (**3**) et résolvons par rapport à l'intégrale du second membre. De même, changeons n en $n+2$ dans la formule (**4**) et résolvons par rapport à l'intégrale du second membre. Nous obtiendrons les deux formules :

$$(5)\quad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^n x\, dx$$

$$(6)\quad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \sin^m x \cos^{n+2} x\, dx$$

197. Usage des formules de réduction. — L'emploi combiné des formules précédentes permet d'effectuer l'intégration dans les diverses hypothèses possibles, mais il y a plusieurs cas à distinguer. Ces divers cas peuvent d'ailleurs rentrer en partie les uns dans les autres.

Premier cas : $m \geq 1$, $n \neq -1$. — C'est alors la formule (**1**) qu'il convient d'appliquer pour commencer. Si $m = 1$, on a immédiatement

$$\int \sin x \cos^n x\, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C$$

ce qui résulte aussi de la formule (**1**). Supposons donc $m > 1$.

1°) Si $m + n > 0$, l'application répétée de la formule (1) permettra de réduire l'exposant n à 0 ou à -1. On obtiendra alors une des deux intégrales suivantes, où k est un entier positif $< m$:

$$\int \sin^k x\, dx, \qquad \int \frac{\sin^k x}{\cos x}\, dx.$$

Celles-ci s'intègreront par la formule de réduction qui convient au troisième cas que nous examinerons tout à l'heure.

2° Si $m + n < 0$, la formule (1) permet de réduire l'exposant m à 1 ou à 0. Si $m = 1$, l'intégration est immédiate, comme on l'a vu il y a un instant. Si $m = 0$, on obtient l'intégrale suivante, où k est un entier positif $< -n$:

$$\int \frac{dx}{\cos^k x}.$$

On l'intègrera par la méthode de réduction que nous indiquerons tout à l'heure (cinquième cas).

3° Si $m + n = 0$, la formule (1) peut s'écrire

$$(7) \qquad \int \operatorname{tg}^m x\, dx = \frac{\operatorname{tg}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tg}^{m-2} x\, dx.$$

Cette formule de réduction permet de réduire l'exposant m à 0 ou à 1, ce qui ramène à une des deux intégrales connues :

$$\int dx = x + C, \qquad \int \operatorname{tg} x\, dx = -\operatorname{Log} \cos x + C.$$

Deuxième cas : $m < -1$, $n =$ ou > 1. — Ce cas est le symétrique du précédent. La formule (2) permettra d'effectuer l'intégration, sinon elle ramènera à l'une des trois intégrales suivantes, où k est un entier positif :

$$\int \cos^k x\, dx, \qquad \int \frac{\cos^k x}{\sin x}\, dx, \qquad \int \frac{dx}{\cos^k x}.$$

Les deux premières s'intègrent par la méthode de réduction que nous indiquerons plus loin pour le quatrième cas, la dernière par celle du cinquième cas.

Troisième cas : $m =$ ou > 1, $n =$ ou < -1. — C'est la formule (3) qui convient à ce cas. Si m est impair, cette formule permet de réduire m à l'unité, auquel cas l'intégration est immédiate. Si m est pair, elle permet de réduire m à 0. On obtient ainsi l'intégrale ($n < -1$)

$$\int \cos^n x\, dx.$$

Si n est égal à 0, à 1 ou à — 1, l'intégration se fait immédiatement par l'une des formules du n° 189. Si n est > 1, on appliquera la méthode de réduction du cas suivant, ce qui achèvera l'intégration.

Quatrième cas : $m =$ ou > -1, $n =$ ou > 1. — Ce cas est le symétrique du précédent. On appliquera la formule (4), Si n est impair, on peut le réduire à l'unité, ce qui rend l'intégration immédiate. Si n est pair, la formule permet de le réduire à 0, ce qui donne l'intégrale

$$\int \sin^m x\, dx.$$

Celle-ci s'obtient par une des formules du n° 189 quand m est égal à 0 à 1 ou à — 1. Sinon, l'intégration s'achèvera par la méthode de réduction du cas précédent.

Cinquième cas : m et n nuls ou négatifs. — La réduction se fera par l'emploi simultané des formules (5) et (6). Si m n'est pas égal à 0 ou à — 1 de prime abord, la formule (5) permettra de réduire m à l'une de ces deux valeurs. De même, si n n'est pas de prime abord égal à 0 ou à — 1, la formule (6) permettra de l'y réduire. En définitive, il restera à calculer une des intégrales

$$\int dx, \qquad \int \frac{dx}{\sin x}, \qquad \int \frac{dx}{\cos x}, \qquad \int \frac{dx}{\sin x \cos x},$$

dont les valeurs sont connues (n° 189).

198. Cas d'intégrabilité facile. — Il y a lieu d'attirer l'attention sur les trois cas suivants, qui sont des cas d'intégrabilité facile correspondant à ceux des différentielles binômes (n° 186).

1° Si m est positif et impair, soit $m = 2k + 1$, $\cos x = z$; il vient

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\int (1 - z^2)^k z^n\, dz$$

2° Si n est positif et impair, soit $n = 2k + 1$, $\sin x = z$; il vient

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int z^m (1 - z^2)^k\, dz$$

3° Si $m + n$ est négatif et pair, soit $m + n = -2k$, $\operatorname{tg} x = z$; il vient

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int z^m (1 + z^2)^{k-1}\, dz.$$

Dans ces trois cas, on développera donc la puissance du binôme par la formule de Newton et chaque terme sera immédiatement intégrable.

La méthode d'intégration par substitution résultant des théorèmes généraux sera donc préférable, dans ces divers cas, à l'emploi des formules de réduction.

Remarque. — Si $m + n = 0$, il vient par la substitution $\operatorname{tg} x = z$

$$\int \operatorname{tg}^m x\, dx = \int \frac{z^m\, dz}{1 + z^2}.$$

En supposant m positif, il suffira donc d'effectuer la division de z^m par $1 + z^2$ pour pouvoir intégrer. Mais on constate immédiatement qu'on tombe sur les mêmes calculs qu'en appliquant la formule (**7**). Donc, dans ce cas, les méthodes d'intégration par rationalisation et par réduction coïncident.

199. Cas particuliers. Intégration de $\sin^m x\, dx$ et de $\cos^m x\, dx$. — Ces différentielles se ramènent l'une à l'autre par le changement de x en $\frac{\pi}{2} + x$; nous considérerons donc seulement la première. Celle-ci sera de l'une des quatre formes suivantes, où k désigne un entier positif :

$$\sin^{2k+1} x\, dx, \qquad \frac{dx}{\sin^{2k} x}, \qquad \frac{dx}{\sin^{2k+1} x}, \qquad \sin^{2k} x\, dx.$$

Les deux premières rentrent dans les deux premiers cas d'intégrabilité facile du n° précédent.

On a, par la substitution $\cos x = z$,

$$\sin^{2k+1} x\, dx = -(1 - z^2)^k\, dz,$$

et, par la substitution $\cot x = u$,

$$\frac{dx}{\sin^{2k} x} = -(1 + u^2)^{k-1}\, du.$$

La troisième, sans se ramener à la différentielle d'un polynôme, se réduit toutefois à une somme de différentielles immédiatement intégrables par la substitution $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, qui donne

$$\frac{dx}{\sin^{2k+1} x} = \frac{1}{2^{2k}} \frac{(1 + t^2)^{2k}\, dt}{t^{2k+1}} = \frac{1}{2^{2k}} \left(t + \frac{1}{t}\right)^{2k} \frac{dt}{t}.$$

La dernière différentielle est la plus longue à intégrer, il faut recourir soit aux méthodes de décomposition du n° 190 soit à la formule de réduction (**5**), qui devient

$$(8) \quad \int \sin^m x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x\, dx.$$

Cette formule ramènera, puisque m est supposé pair, à

$$\int dx = x + C.$$

Remarque. — Les résultats précédents permettent de prévoir quelle sera la forme de l'intégrale cherchée dans les quatre hypothèses que nous venons d'examiner. Soient $P_n(x)$ un polynôme de degré n en x, A et B des constantes numériques. On aura

$$\int \sin^{2k+1} x \, dx = P_{2k+1}(\cos x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2k} x} = P_{2k-1}(\cot x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2k+1} x} = P_{2k}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) - P_{2k}\left(\cot \frac{x}{2}\right) + A \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$$

$$\int \sin^{2k} x \, dx = \sin x \cos x \, P_{2k-2}(\sin x) + B x + C.$$

200. Intégration de $\sin^m x \cos^n x \, dx$ par d'autres méthodes. — Il est toujours possible d'éviter l'emploi des formules de réduction. Nous avons déjà vu comment au n° 190 quand m et n sont nuls ou positifs. Nous supposerons donc maintenant qu'un au moins de ces exposants soit négatif.

I. Si m et n sont de signes contraires, la différentielle proposée sera de l'une des deux formes suivantes, où p et q sont nuls ou positifs :

$$\frac{\sin^p x}{\cos^q x} dx, \qquad \frac{\cos^p x}{\sin^q x} dx.$$

Si p est impair, c'est un des cas d'intégrabilité facile du n° 198. Supposons donc que p soit pair et considérons seulement la deuxième différentielle, puisque la première s'y ramène par le changement de x en $\frac{\pi}{2} + x$. Soit $p = 2k$; on remplacera $\cos^p x$ par $(1 - \sin^2 x)^k$, on développera et la différentielle se partagera en une somme d'autres qui s'intègreront par les méthodes du n° 199. Toutefois on n'appliquera cette méthode que si $m + n$ n'est pas pair et négatif, auquel cas on retrouverait encore une fois un cas d'intégrabilité facile du n° 198.

II. — Si m et n sont tous deux négatifs et de même parité, $m + n$ est pair et négatif. C'est le cas facile que nous venons de rappeler. Si m et n sont négatifs mais de parités différentes, la différentielle sera de l'une des deux formes suivantes où p et q sont positifs (q pouvant être nul) :

$$\frac{dx}{\sin^{2p} x \cos^{2q+1} x}, \qquad \frac{dx}{\sin^{2q+1} x \cos^{2p} x}.$$

On peut d'ailleurs supposer que ce soit la seconde forme, car la première s'y ramène par le changement de x en $x + \frac{\pi}{2}$.

Pour intégrer cette différentielle, on la multiplie par $\sin^2 x + \cos^2 x$. Cette multiplication a pour effet de la décomposer en deux autres :

$$\frac{dx}{\sin^{2q-1} x \cos^{2p} x} + \frac{dx}{\sin^{2q+1} x \cos^{2p-2} x}.$$

Ces deux différentielles sont encore de la même forme que la proposée, mais les exposants sont diminués. Il n'y a exception pour la première que si $q = 0$ et pour la seconde que si $p = 1$, auxquels cas ces différentielles prennent l'une des deux formes :

$$\frac{\sin x \, dx}{\cos^{2p} x}, \qquad \frac{dx}{\sin^{2q+1} x};$$

mais alors la première est immédiatement intégrable et la seconde s'intègre par la méthode du n° 199.

Si les termes obtenus ne sont pas de cette forme, on recommence sur chacun d'eux la même opération et on continue ainsi de suite jusqu'à ce que l'intégration puisse se faire comme ci-dessus.

Exercices.

1. On trouve par les formules de réduction :

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{\cos x}{3 \sin^3 x} - \frac{2}{3} \cot x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4} \left(\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{5}{2} \frac{1}{\cos^2 x} \right) + \frac{3}{8} \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + C.$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \frac{\sin^2 x}{3 \cos^3 x} - \frac{2}{3 \cos x} + C.$$

$$\int \sin^4 x \, dx = -\frac{\sin x \cos x}{4} \left(\sin^2 x + \frac{3}{2} \right) + \frac{3x}{8} + C.$$

2. On trouve par les méthodes du n° 199 :

$$\int \sin^7 x \, dx = -\left(\cos x - \cos^3 x + \frac{3}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x \right) + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\left(\cot x + \frac{2}{3} \cot^3 x + \frac{1}{5} \cot^5 x \right) + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \frac{1}{64} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^4 + \frac{1}{8} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^2$$

$$- \frac{1}{64} \left(\cot \frac{x}{2} \right)^4 - \frac{1}{8} \left(\cot \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{3}{8} \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

CHAPITRE VI.

Intégrales définies.

---

§ 1. Des intégrales définies considérées comme limites de sommes.

201. Origine géométrique des intégrales définies. — Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b) ; considérons la courbe qui a pour équation en axes rectangulaires

$$y = f(x) \, ;$$

et supposons, pour fixer les idées, que l'ordonnée soit constamment positive dans l'intervalle (a, b). Proposons-nous de définir et d'évaluer l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et les deux droites $x = a$ et $x = b$.

Partageons cette aire en segments consécutifs par des parallèles à l'axe des y d'abscisses successives $x_2, x_3, .. \, x_i, .. \, x_n$ menées entre les abscisses extrêmes $x_1 = a$, $x_{n+1} = b$. Un segment quelconque de base $(x_{i+1} - x_i)$ sera compris entre deux rectangles, l'un inscrit dans ce segment et l'autre circonscrit. Le premier a pour hauteur le minimum m_i de $f(x)$ dans l'intervalle (x_i, x_{i-1}) et l'autre, le maximum M_i de $f(x)$ dans le même intervalle. Donc l'aire à évaluer sera comprise entre les deux sommes :

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \, (x_{i+1} - x_i), \qquad S = \sum_{i=1}^{n} M_i \, (x_{i+1} - x_i),$$

qui sont celles des rectangles inscrits ou des rectangles circonscrits aux segments.

Donc, si l'on peut démontrer que ces deux sommes tendent vers une limite commune, lorsque les points $x_1, x_2, .. \, x_i ...$ se rapprochent indéfiniment les uns des autres et que leur nombre augmente indéfiniment, cette limite commune pourra servir de définition et de mesure à l'aire que nous nous sommes proposé d'étudier.

Le problème géométrique que nous venons de poser conduit donc

à étudier les combinaisons des formes s et S. On verra que, comme le fait prévoir la représentation géométrique, l'égalité de leurs limites a toujours lieu quand la fonction $f(x)$ est continue. Cette limite commune s'appelle alors une *intégrale définie*. Donc une intégrale définie représente géométriquement l'aire d'une courbe plane.

Nous allons maintenant reprendre la question à un point de vue purement analytique et plus général. Mais les considérations préliminaires qui précèdent sont de nature à jeter un certain jour sur les démonstrations plus abstraites que nous allons exposer.

202. Définition générale et propriétés des sommes S et s. — Soit $f(x)$ une fonction simple et bornée dans un intervalle (a, b). Nous ne faisons d'abord aucune hypothèse sur la continuité de cette fonction. Partageons l'intervalle (a, b) en n parties consécutives par les points :

$$x_1 = a,\ x_2,\ x_3, \dots\ x_i, \dots\ x_n\ ,\ x_{n+1} = b.$$

Désignons, en général, par

$$\delta_i = x_{i+1} - x_i$$

l'amplitude d'un de ces intervalles, par M_i et m_i les limites supérieures et inférieures de $f(x)$ dans l'intervalle δ_i. Formons les deux sommes, analogues à celles considérées dans le n° précédent,

$$S = \sum_1^n M_i\, \delta_i, \qquad s = \sum_1^n m_i\, \delta_i.$$

Ces deux sommes jouissent des deux propriétés fondamentales suivantes :

I. *Les deux sommes* S *et s sont comprises entre deux limites fixes, indépendantes du mode de subdivision de l'intervalle* (a, b).

En effet, $f(x)$ étant bornée dans l'intervalle (a, b), soient M et m ses limites supérieure et inférieure dans cet intervalle. Considérons la somme S ; tous les M_i sont compris entre M et m et la somme des intervalles δ_i est égale à $(b - a)$. Donc $\sum M_i\, \delta_i$ ou S est compris entre les deux limites :

$$M(b-a) \qquad \text{et} \qquad m(b-a).$$

On prouve semblablement que s est compris entre les deux mêmes limites.

II. *Si, ayant calculé les deux sommes* S *et s pour un premier mode de subdivision, on intercale de nouveaux points de subdivision entre les premiers, la somme* S *sera stationnaire ou décroissante, la somme s*

stationnaire ou croissante. De plus, si δ désigne une limite supérieure de l'amplitude des intervalles primitifs et ν le nombre des nouveaux points de subdivision ajoutés, la variation de chacune des deux sommes sera moindre que $\nu\,(\mathrm{M} - m)\,\delta$.

Considérons la somme S. Supposons d'abord qu'on n'ajoute qu'un seul point de subdivision et que ce point tombe dans l'intervalle δ_i. Cet intervalle sera partagé en deux autres δ'_i et δ''_i et le terme primitif $\mathrm{M}_i\delta_i$ sera remplacé dans la nouvelle valeur de S par la somme

$$\mathrm{M}'_i\delta'_i + \mathrm{M}''_i\delta''_i,$$

où M'_i et M''_i sont les limites supérieures de $f(x)$ dans les intervalles δ'_i et δ''_i. Mais, ceux-ci étant des parties de δ_i, on a

$$m_i \leqq \mathrm{M}'_i \leqq \mathrm{M}_i, \qquad m_i \leqq \mathrm{M}''_i \leqq \mathrm{M}_i$$

et, comme $\delta'_i + \delta''_i = \delta_i$, on en conclut

$$\mathrm{M}'_i\delta'_i + \mathrm{M}''_i\delta''_i \leqq \mathrm{M}_i\delta_i,$$

$$\mathrm{M}'_i\delta'_i + \mathrm{M}''_i\delta''_i \geqq m_i\delta_i.$$

Donc, après l'adjonction d'un nouveau point de subdivision, la somme S ne peut pas avoir augmenté, et si elle a diminué, sa variation sera inférieure à $(\mathrm{M}_i - m_i)\,\delta_i$ et *a fortiori* à $(\mathrm{M} - m)\,\delta$.

Si, au lieu d'un seul, on ajoute ν nouveaux points de subdivision, on peut les supposer ajoutés successivement, et comme le raisonnement précédent s'applique pour chacun d'eux, on voit que la somme S sera stationnaire ou décroissante et que sa diminution totale ne pourra surpasser $\nu\,(\mathrm{M} - m)\,\delta$.

Le raisonnement est analogue pour la somme s.

Ceci posé, on a le théorème fondamental suivant :

203. Théorème de M. Darboux. — *Si l'on multiplie indéfiniment le nombre des points de subdivision, de manière que tous les intervalles δ_i tendent vers zéro, les deux sommes* S *et* s *tendront respectivement vers des limites déterminées* L *et* l, *indépendantes du mode de subdivision adopté.*

Considérons d'abord la somme S. C'est une quantité variable, mais bornée supérieurement et inférieurement en vertu de la propriété I du n° précédent. Soit L le plus grand nombre qui ne surpasse aucune des sommes S possibles, ou, en d'autres termes, la *limite inférieure* de toutes ces sommes (n° 20). Je dis que S a nécessairement pour limite L quand tous les intervalles δ_i tendent vers zéro.

En effet, soit ε un nombre positif aussi petit qu'on veut, on pourra trouver un premier mode de subdivision Δ', tel que la somme correspondante S' soit moindre que $L + \varepsilon$, sinon L ne serait pas la limite inférieure supposée. Soit ν le nombre des points de subdivision de Δ'. Je vais démontrer que toute somme S relative à un mode quelconque de subdivision Δ en parties plus petites que δ, différera de L d'une quantité arbitrairement petite 2ε, pourvu seulement que δ soit assez petit.

En effet, considérons un troisième mode de subdivision Δ'' obtenu en ajoutant les points de subdivision du mode Δ' à ceux de Δ, donc au maximum ν nouveaux points de subdivision, et soit S'' la somme correspondante. On aura, par la propriété II du n° précédent,

$$S - S'' < \nu (M - m) \delta.$$

Mais Δ'' résulte aussi de l'adjonction des points de subdivision du mode Δ à ceux de Δ', de sorte qu'on a aussi $S'' \overline{\leq} S'$ et *a fortiori* $<$ $L + \varepsilon$.

On conclut donc *a fortiori* de l'inégalité précédente, qui peut s'écrire $S < S'' + \nu (M - m) \delta$,

$$S < L + \varepsilon + \nu (M - m) \delta$$

et il suffit de supposer $\delta < \varepsilon : (M - m) \nu$ pour que l'on ait

$$S < L + 2 \varepsilon.$$

Donc S, qui ne peut être inférieur à L, en diffère aussi peu que l'on veut à condition de supposer tous les δ_i assez petits, c'est-à-dire que S a pour limite L.

On prouve d'une manière analogue que s tend vers une limite déterminée l, qui est la limite supérieure de toutes les sommes s possibles.

Ces deux limites L et l peuvent être différentes, mais le cas le plus intéressant est celui où elles sont égales et l'on dit alors que la fonction $f(x)$ est *intégrable*. Cette condition a lieu lorsque $f(x)$ vérifie certaines conditions de continuité. Nous commencerons par établir quelques propriétés générales des sommes L et l, qui nous conduiront facilement à cette conclusion et qui nous seront d'ailleurs utiles par elles-mêmes.

204. Propriétés des limites de sommes L et l. — Nous venons de démontrer que les sommes S et s tendent vers des limites détermi-

nées quand toutes les parties δ_i de l'intervalle (a, b) tendent vers zéro. Ces limites dépendent évidemment de l'intervalle (a, b) lui-même. C'est pourquoi, au lieu de L et l, nous écrirons aussi L_a^b et l_a^b avec des indices qui font connaître l'intervalle dans lequel se fait la sommation.

Ces expressions jouissent des propriétés suivantes :

I. *Si c est un point intermédiaire entre a et b, on a*

$$L_a^b = L_a^c + L_c^b$$

et une relation analogue pour l.

En effet, les deux membres ont le même sens pourvu que, dans le calcul de L_a^b, le point c soit toujours choisi comme point de subdivision de l'intervalle (a, b), ce qu'on peut toujours admettre, puisque la limite est indépendante du mode de subdivision adopté.

II. *En désignant par* μ *une moyenne entre les limites supérieure et inférieure* M *et* m *de* $f(x)$ *dans l'intervalle* (a, b), *on peut écrire*

$$L_a^b = \mu\,(b-a)$$

et une relation analogue pour l.

En effet, on a vu (n° 202) que la somme S est toujours comprise entre $M(b-a)$ et $m(b-a)$, donc sa limite sera comprise entre les deux mêmes quantités, ce qu'exprime l'équation précédente.

III. *Remplaçons b par une variable* X, *ce qui est permis pourvu que* X *soit* $> a$ *et que* $f(x)$ *soit toujours bornée dans l'intervalle* (a, X) ; *les deux limites de sommes*

$$L_a^X, \qquad l_a^X$$

seront des fonctions de X, *je dis que ce sont des fonctions continues de* X.

Posons, pour plus de clarté,

$$L_a^X = F(X).$$

Donnons à X un accroissement positif h ; on aura, par la propriété I,

$$F(X+h) = L_a^X + L_X^{X+h} = F(X) + L_X^{X+h}$$

et, par la propriété II,

$$F(X+h) - F(X) = \mu h,$$

μ étant une moyenne entre les limites supérieure et inférieure de $f(x)$

dans l'intervalle $(X, X+h)$. Donc μ reste fini quand h tend vers zéro et μh tend vers zéro avec h. On a donc

$$\lim_{h=0} F(X+h) = F(X).$$

La même conclusion subsiste pour h négatif. En effet, on a dans ce cas, en s'appuyant sur les mêmes théorèmes,

$$F(X+h) = L_a^X - L_{X+h}^X = F(X) - \mu(-h) = F(X) + \mu h,$$

c'est-à-dire la même équation que dans le premier cas. Donc L_a^X est une fonction continue de X.

La démonstration se fait de même pour l_a^X.

IV. *Si $f(x)$ est continue pour $x = X$, les deux fonctions L_a^X et l_a^X ont pour dérivée $f(X)$ en ce point.*

Reprenons, en effet, l'équation précédente

$$F(X+h) - F(X) = \mu h,$$

où h a un signe quelconque et où μ désigne une valeur moyenne entre les limites supérieure et inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle $(X, X+h)$. On en tire, en faisant tendre h vers zéro et en observant que $f(x)$ est supposée continue pour $x = X$,

$$\lim \frac{F(X+h) - F(X)}{h} = \lim \mu = f(X).$$

Donc, par définition de la dérivée, $F(X)$ ou L_a^X a pour dérivée $f(X)$. La démonstration serait la même pour l_a^X.

205. Fonctions intégrables. Intégrales définies. — Lorsque, pour une fonction $f(x)$, les deux limites de sommes L_a^b et l_a^b sont égales, la fonction $f(x)$ est *intégrable* dans l'intervalle (a, b). La valeur commune de ces deux limites s'appelle une *intégrale définie* et se représente par le symbole

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

que l'on prononce : intégrale (ou, plus souvent, somme) de a à b $f(x)\, dx$.

La lettre x sous le signe d'intégration peut être remplacée par toute autre lettre, l'expression

$$\int_a^b f(y)\, dy$$

est identique à la précédente.

Les quantités a et b sont les *limites* de l'intégrale ; a est sa limite inférieure et b sa limite supérieure.

Nous ne nous proposons pas de rechercher ici les caractères généraux des fonctions intégrables. C'est une étude assez spéciale qui doit être faite dans un paragraphe particulier. On ne rencontre guère, en pratique, que les fonctions dont l'intégrabilité résulte des deux théorèmes suivants, auxquels nous nous bornerons pour le moment :

I. *Une fonction $f(x)$ est intégrable dans tout intervalle (a, b) où elle est continue.*

En effet, faisons varier X depuis la valeur a jusqu'à la valeur b ; par la propriété IV du n° précédent, les deux fonctions L_a^X et l_a^X ont constamment même dérivée dans l'intervalle (a, b), donc elles ne peuvent différer que par une constante. Mais il résulte de la propriété I du n° précédent qu'elles s'annulent toutes deux quand X tend vers a. Donc elles sont constamment égales et elles le sont, en particulier, pour $X = b$.

Ce théorème peut être démontré directement, sans recourir à la considération des dérivées, mais en se servant du théorème IV du n° 27. En effet, calculons les sommes S et s avec les mêmes subdivisions δ_i, ce qui n'influe pas sur leurs limites, il vient

$$S - s = \Sigma (M_i - m_i)\, \delta_i.$$

Quelque petit que soit ε, on peut supposer tous les δ_i assez petits pour que toutes les différences $M_i - m_i$ soient $< \varepsilon$, et comme la somme des δ_i est égale à $(b - a)$, il vient

$$S - s < \varepsilon (b - a).$$

Donc la différence $S - s$ devient inférieure à tout nombre donné à condition de pousser la subdivision assez loin ; par conséquent, S et s ont la même limite et $L = l$.

II. *Plus généralement, une fonction bornée $f(x)$ est intégrable dans tout intervalle (a, b), où elle n'a qu'un nombre limité de points de discontinuité.*

En effet, faisons croître X à partir de la valeur a et soient $X_1, X_2, \ldots$ les points de discontinuité successifs de $f(x)$. Les deux fonctions L_a^X et l_a^X sont égales, par la démonstration précédente, tant que X est $< X_1$, donc, étant continues (n° 204, III), elles sont encore égales pour $X = X_1$. Elles ne peuvent différer que par une constante quand X varie de X_1 à X_2 car leurs dérivées sont égales, mais,

comme les deux fonctions sont égales pour $X = X_1$, elles sont constamment égales et elles le restent encore pour $X = X_2$, et ainsi de suite.

206. Autres limites de sommes qui peuvent servir de définition à l'intégrale définie. — Il est souvent utile de considérer l'intégrale définie comme la limite d'expressions différentes des précédentes. Supposons que $f(x)$ soit intégrable dans l'intervalle (a, b) et faisons de nouveau le partage de cet intervalle par les points $x_1 = a, x_2, \dots x_i, \dots x_{n+1} = b$ en parties d'amplitudes $\delta_i = (x_{i+1} - x_i)$. On pourra aussi poser

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \delta_i,$$

les points ξ_i étant choisis respectivement d'une manière arbitraire dans chacun des intervalles δ_i et tous ces intervalles tendant vers zéro. En effet, $f(\xi_i)$ étant compris entre M_i et m_i, la somme précédente est comprise entre les deux expressions $\Sigma M_i \delta_i$ et $\Sigma m_i \delta_i$, qui ont toutes deux pour limite l'intégrale définie, donc la somme considérée doit avoir la même limite.

On peut choisir, en particulier, $\xi_i = x_i$ et écrire $\delta_i = dx_i$; il vient alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, dx_i$$

Ainsi, l'intégrale définie peut être considérée comme *la limite d'une somme de différentielles*. C'est même là le premier point de vue auquel on s'est placé pour la définir. Aussi c'est dans la relation précédente que l'on trouve l'origine de la notation de l'intégrale définie et, en particulier, du signe $\int$ qui représente une limite de somme.

207. Propriétés des intégrales définies. — Répétons d'abord trois propriétés, déjà reconnues (n° 204) aux limites de sommes L et l qui servent de définition à l'intégrale définie :

I. Si c est compris entre a et b, on a

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

II. On peut poser, μ étant intermédiaire entre les limites supérieure et inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b)

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\, dx = \mu\,(b - a)$$

III. L'intégrale à limite variable X

$$\int_a^X f(x)\,dx$$

est une fonction continue de X et, en tout point où $f(X)$ est continue, elle a $f(X)$ pour dérivée. D'où le théorème suivant qui est fondamental :

La dérivée d'une intégrale définie par rapport à sa limite supérieure est égale à la valeur de la fonction sous le signe d'intégration à cette limite, pourvu que cette fonction soit continue en ce point.

L'intégrale définie possède aussi des propriétés qui lui sont plus particulières, comme les suivantes :

IV. Si une fonction intégrable $f(x)$ se décompose en une somme d'autres fonctions intégrables $\varphi(x) + \psi(x) + \cdots$, on a

$$(3) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx + \cdots$$

C'est la *règle d'intégration par décomposition* dans le cas des intégrales définies.

Cette règle se démontre facilement au moyen de la définition de l'intégrale donnée au n° précédent. En effet, on a constamment

$$\Sigma f(\xi_i)\,\delta_i = \Sigma \varphi(\xi_i)\,\delta_i + \Sigma \psi(\xi_i)\,\delta_i + \cdots$$

Faisons tendre tous les δ_i vers zéro et passons à la limite, l'équation précédente sera remplacée, par définition, par l'équation (3).

V. Il est utile d'observer la relation

$$(4) \qquad \int_a^b dx = (b - a),$$

qui a lieu par définition, car, $f(x)$ étant égale à 1, cette intégrale est la limite de $\Sigma\delta_i$ et cette somme est toujours égale à $b - a$.

VI. L'intégrale définie a, lorsque $f(x)$ est continue et positive, une *signification géométrique*, qui résulte des considérations émises au début du chapitre (n° 201). L'expression

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

mesure l'aire de la courbe qui a pour équation $y = f(x)$ en coordonnées rectangulaires, cette aire étant limitée par la courbe, l'axe des x et les deux droites $x = a$ et $x = b$.

208. Autres propriétés et remarques complémentaires. — I. On a supposé jusqu'ici $b > a$ pour définir l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

mais on peut aussi supposer $b < a$. La définition reste formellement la même, pourvu que $f(x)$ soit intégrable dans l'intervalle (b, a). Le partage de cet intervalle se fait alors par les points $x_2, x_3, \ldots x_i, \ldots x_n$ qui se suivent dans l'ordre de a vers b. Soit encore $x_1 = a$, $x_{n+1} = b$ et $\delta_i = x_{i+1} - x_i$; on pose, comme précédemment,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_i\delta_i = \lim \sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\delta_i,$$

mais toutes les quantités δ_i sont maintenant négatives.

Remarquons que l'on a, par la définition habituelle,

$$\lim\sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_i\delta_i = -\lim\sum_{i=n}^{1} \mathrm{M}_i(-\delta_i) = -\int_b^a f(x)\,dx;$$

nous obtenons ainsi la relation

$$(5) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Donc *intervertir les limites d'une intégrale définie revient à changer son signe.*

II. La remarque précédente permet d'écrire l'équation (1) du nº précédent sous la forme suivante :

$$(6) \qquad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0,$$

comme on a en géométrie $ab + bc + ca = 0$ en vertu du principe des signes. Sous cette forme, l'équation est symétrique en a, b et c ; par conséquent, elle subsiste quelles que soient les situations respectives de ces trois points. Elle suppose seulement que la fonction soit intégrable dans chacun des intervalles considérés.

III. *Un facteur constant peut être mis hors du signe d'intégration.* Soit, en effet, A constant ; on a, par définition (nº 206),

$$\int_a^b \mathrm{A}\,f(x)\,dx = \lim \sum \mathrm{A}\,f(\xi_i)\,\delta_i = \mathrm{A} \lim \sum f(\xi_i)\,\delta_i$$

Par conséquent,

$$(7) \qquad \int_a^b \mathrm{A}\,f(x)\,dx = \mathrm{A}\int_a^b f(x)\,dx.$$

IV. Lorsque $f(x)$ est continue, l'équation (2) du nº précédent peut être transformée. Cette fonction peut acquérir toute valeur comprise entre son maximum et son minimum dans l'intervalle (a, b) et, en particulier, la valeur μ pour une valeur ξ de x comprise entre a et b. Il vient donc

$$(8) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a).$$

Cette formule ainsi que la formule (2) dont elle dérive, sont des cas particuliers du *théorème de la moyenne*, qui suit.

209. Théorème de la moyenne. — Considérons l'intégrale $(b > a)$

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

et supposons que la fonction à intégrer soit le produit de deux fonctions intégrables, dont l'une $\varphi(x)$ est constamment positive dans l'intervalle (a, b) et dont l'autre a respectivement M et m comme limites supérieure et inférieure dans cet intervalle. On aura

$$\int_a^b [\mathrm{M} - f(x)]\,\varphi(x)\,dx > 0 \qquad \int_a^b [f(x) - m]\,\varphi(x)\,dx > 0,$$

car, les fonctions à intégrer étant constamment positives, ces intégrales sont des limites de sommes positives. On peut décomposer ces intégrales en deux autres (nº 207, IV) et faire sortir les constantes M et m du signe d'intégration (nº 208, III); il vient ainsi, sans difficulté,

$$\mathrm{M}\int_a^b \varphi(x)\,dx > \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx > m\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Donc, en désignant par μ une valeur moyenne entre celles de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b), on peut écrire

$$(9) \qquad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \mu\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

C'est dans cette relation que consiste le *théorème de la moyenne*. Nous l'avons établie en supposant $b > a$ et $\varphi(x)$ positif, mais elle subsiste évidemment, *pourvu que $\varphi(x)$ ne change pas de signe dans l'intervalle (a, b)*.

Quand $f(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle (a, b), on désigne par ξ une valeur de x dans cet intervalle et l'on peut écrire l'équation (9) sous la forme suivante :

$$(10) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

En faisant $\varphi(x) = 1$, dans les formules (**9**) et (**10**) on retrouve les formules (**2**) et (**8**) obtenues plus haut, savoir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu \int_a^b dx = \mu\,(b - a),$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b dx = f(\xi)\,(b - a).$$

§ 2. Relation entre les intégrales définies et indéfinies. Calcul des intégrales définies.

210. Retour sur le chapitre précédent : Existence d'une fonction ayant pour dérivée $f(x)$. Remarques sur les notations. — Dans tout le chapitre V, on a admis provisoirement le résultat suivant, énoncé au n° 158 : *Si $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), il existe une fonction ayant $f(x)$ pour dérivée dans cet intervalle.* Ce théorème se trouve maintenant rigoureusement établi. En effet, l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy$$

est une fonction particulière qui jouit de cette propriété (n° 207, III). Lorsqu'il n'en résulte aucune confusion, on remplace habituellement la variable y par x dans la notation de l'intégrale précédente, qui devient

$$\int_a^x f(x)\,dx.$$

Cette expression a donc pour dérivée la fonction $f(x)$ écrite sous le signe d'intégration. Cette propriété commune des intégrales indéfinie et définie :

$$\int f(x)\,dx, \qquad \int_a^x f(x)\,dx,$$

explique l'origine du signe $\int$ dans la notation de la première.

211. Relation fondamentale pour le calcul des intégrales définies. — Lorsque, par un procédé quelconque, on a trouvé une fonction continue F (x) qui admet $f(x)$ pour dérivée dans l'intervalle (a, b), cette fonction ne peut différer que par une constante de l'intégrale définie considérée ci-dessus, car ces deux fonctions ont la même dérivée. Il vient donc, C désignant une constante à déterminer,

$$\int_a^x f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}.$$

En particulier, si $x = a$, on trouve $0 = F(a) + C$, d'où $C = -F(a)$; par conséquent,

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

et, si l'on fait $x = b$,

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

C'est la *formule fondamentale* pour le calcul des intégrales définies. On la met souvent sous la forme plus condensée

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Le second membre se prononce en abrégé : $F(x)$ aux limites a et b. Il représente l'accroissement éprouvé par la fonction continue $F(x)$, quand x passe de a à b. De là le théorème suivant :

L'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$, *prise entre deux limites entre lesquelles* $f(x)$ *est continue, est égale à l'accroissement d'une fonction continue* $F(x)$ *ayant* $f(x)$ *pour dérivée, quand* x *passe de* a *à* b.

212. Sur la manière d'employer le théorème précédent. — Le théorème précédent est fondamental. Il ramène le calcul de l'intégrale définie à celui de l'intégrale indéfinie, auquel s'appliquent toutes les méthodes exposées dans le chapitre V.

En effet, l'intégrale indéfinie est, par définition, une fonction ayant pour dérivée $f(x)$ et l'équation (2) peut s'écrire

$$(3) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b.$$

L'intégrale indéfinie comporte une constante arbitraire, mais on peut la négliger pour le calcul de l'intégrale définie, car le théorème précédent s'applique à toute fonction ayant pour dérivée $f(x)$.

Lorsque la fonction $F(x)$ est à déterminations multiples, le choix des valeurs à attribuer à $F(a)$ et $F(b)$ dans la formule (1) résulte de la condition de continuité imposée à $F(x)$. En général, on pourra choisir arbitrairement la détermination de $F(a)$ mais alors celle de $F(b)$ est imposée, car il faut que $F(x)$ varie d'une manière continue de $F(a)$ à $F(b)$ quand x varie de a à b.

Cette remarque s'applique, en particulier, aux inverses des fonctions circulaires. On a, par exemple,

$$\int_a^b \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arc tg}\, b - \text{arc tg}\, a,$$

mais les valeurs arc tg a et arc tg b doivent appartenir à la même branche de la fonction. Le plus simple est donc de considérer la branche principale. Si l'on fait $a = 0$ et $b = 1$, il vient ainsi

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

213. Remarque sur la définition de l'intégrale définie. — Certains auteurs prennent la relation (**3**)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$$

comme définition de l'intégrale définie, et considèrent comme une propriété l'égalité de cette expression avec une limite de somme. Ce mode d'exposition peut paraître plus simple à première vue, mais cette simplicité est plus apparente que réelle. En effet, cette définition postule l'existence d'une fonction ayant pour dérivée $f(x)$, et celle-ci ne peut être établie d'une manière générale que par la considération d'une limite de somme.

214. Extension des procédés d'intégration aux intégrales définies. — Les règles d'intégration par décomposition, par parties et par substitution s'étendent aux intégrales définies, mais avec des modifications tenant aux limites.

I. Si u, v, w, ... sont des fonctions intégrables de x, on aura

$$(4) \quad \int_a^b (u + v - w + \cdots)\,dx = \int_a^b u\,dx + \int_a^b v\,dx - \int_a^b w\,dx + \cdots$$

C'est la *règle d'intégration par décomposition* déjà démontrée (n° 707, IV).

II. Soient u et v des fonctions de x ayant des dérivées intégrables u' et v' dans l'intervalle (a, b) ; uv a pour dérivée $uv' + v'u$; on a donc

$$\int_a^b (uv' + u'v)\,dx = \Big[uv\Big]_a^b$$

et, par la règle précédente,

$$(5) \quad \int_a^b uv'\,dx = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b vu'\,dx.$$

C'est la *règle d'intégration par parties.*

III. La *règle d'intégration par substitution* exige un peu plus d'attention. Soit $f(x)$ une fonction continue de x dans l'intervalle (a, b) ; posons

$$x = \varphi(t)$$

et supposons : 1° que, quand t varie de t_1 à T, $\varphi(t)$ varie d'une manière continue de a à b ; 2° que $\varphi(t)$ ait une dérivée continue $\varphi'(t)$ dans l'intervalle (t_1, T) ; 3° que $f[\varphi(t)]$ soit aussi continue dans cet intervalle. Cette dernière condition résultera d'ailleurs des précédentes si $\varphi(t)$ reste compris entre a et b. Je dis qu'on aura

$$(6) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{\mathrm{T}} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Pour le démontrer, considérons les deux fonctions de t :

$$\int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t)} f(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_{t_1}^{t} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Elles ont même dérivée. La dérivée de la seconde est la fonction sous le signe d'intégration (n° 207). Celle de la première s'obtient par la règle des fonctions de fonctions : on calcule d'abord la dérivée de cette intégrale par rapport à sa limite supérieure $\varphi(t)$, ce qui donne $f[\varphi(t)]$, puis on multiplie ce résultat par la dérivée de $\varphi(t)$. On trouve dans les deux cas $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$.

Les deux intégrales ayant même dérivée, ne diffèrent que par une constante ; elles s'annulent toutes deux pour $t = t_1$, donc elles sont égales. En particulier, si $t = \mathrm{T}$, il vient

$$\int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(\mathrm{T})} f(x)\,dx = \int_{t_1}^{\mathrm{T}} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Cette équation revient à (6), car $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(\mathrm{T}) = b$.

Remarque. — La formule (6) étend aux intégrales définies la règle d'intégration par substitution. On voit que l'intégrale transformée par la substitution $x = \varphi(t)$ aura pour limites les valeurs de t qui correspondent aux valeurs limites de x.

La règle d'intégration par substitution ne peut être employée sans certaines précautions. En effet, si l'une des conditions supposées dans la démonstration venait à manquer, la règle pourrait conduire à des résultats erronés.

Considérons, par exemple, l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} dx.$$

Si l'on fait la substitution $x = 1 : t$, l'application inconsidérée de la formule (6) donne un résultat faux, savoir

$$\int_{-1}^{+1} dx = -\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{t^2}.$$

Mais les conditions du théorème n'ont pas lieu, car $\varphi(t)$, étant égal à $1 : t$, ne varie pas d'une manière continue quand t varie de -1 à $+1$.

214. Généralisation de la démonstration relative au changement de variables. — La règle d'intégration par substitution vient d'être établie dans l'hypothèse où $f(x)$ est une fonction continue. La démonstration peut s'étendre à toute fonction intégrable $f(x)$. Considérons donc, dans cette hypothèse, l'intégrale.

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

et proposons-nous de la transformer par la substitution

$$x = \varphi(t),$$

en admettant : 1° que $\varphi(t)$ et $\varphi'(t)$ sont continues dans l'intervalle de t_1 à T ; 2° que l'on a $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(T) = b$; 3° que $f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)$ est intégrable dans l'intervalle (t_1, T).

Nous commencerons par supposer que $\varphi'(t)$ ne change pas de signe dans l'intervalle de t_1 à T. Nous admettrons, pour fixer les idées, que T est $> t_1$ et que $\varphi'(t)$ est positif. Alors $\varphi(t)$ est une fonction croissante dans l'intervalle (t_1, T). Décomposons cet intervalle en parties indéfiniment décroissantes par les points $t_1, t_2, \ldots t_i, \ldots t_{n+1} = T$ et soient $x_1 = a, x_2, \ldots x_i, \ldots x_{n+1} = b$ les valeurs correspondantes de x. Ces valeurs seront rangées par ordre de grandeur et se rapprocheront indéfiniment avec celles de t. Posons, en général,

$$\delta_i = x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) :$$

on aura par le théorème des accroissements finis, θ_i étant compris entre t_i et t_{i+1},

$$\delta_i = \varphi'(\theta_i)\,(t_{i+1} - t_i).$$

Désignons encore par ξ_i la valeur de x correspondant à $t = \theta_i$; celle-ci sera comprise entre x_i et x_{i+1}, de sorte qu'on aura, par définition (n° 206).

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \delta_i .$$

Cette somme peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^{n} f[\varphi(\theta_i)]\, \varphi'(\theta_i)\,(t_{i+1} - t_i)$$

et, quand tous les intervalles tendent vers zéro, elle a pour limite

$$\int_{t_1}^{T} f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt.$$

Telle sera donc l'expression de l'intégrale transformée en t.

Cette première démonstration suppose que $\varphi'(t)$ ne change pas de signe dans l'intervalle (t_1, T). On peut l'étendre au cas où $\varphi'(t)$ changerait de signe, même un nombre infini de fois.

Considérons, en effet, la différence

$$\psi(t) = \int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t)} f(x)\,dx - \int_{t_1}^{t} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

C'est une fonction de t dans l'intervalle (t_1, T). Elle s'annule pour $t = t_1$ et, par conséquent, elle est nulle dans tout cet intervalle, car je vais démontrer que sa dérivée est constamment nulle.

A cet effet, considérons deux valeurs quelconques t et $t + \Delta t$ dans l'intervalle (t_1, T). Soient $\Delta\varphi$ et $\Delta\psi$ les accroissements de φ et de ψ qui correspondent à Δt. Observons qu'on peut remplacer t par une autre lettre x sous le signe d'intégration ; on aura

$$\Delta\psi = \int_{\varphi(t)}^{\varphi(t)+\Delta\varphi} f(x)\,dx - \int_{t}^{t+\Delta t} f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx.$$

Considérons une valeur particulière t ; je dis que $\psi'(t)$ sera nul. En effet, $\varphi'(t)$ est différent de zéro ou est nul :

1° Si $\varphi'(t)$ est différent de zéro, on peut supposer Δt assez petit en valeur absolue pour que $\varphi'(x)$ qui est une fonction continue ne change pas de signe dans l'intervalle de t à $t + \Delta t$. Alors les intégrales de l'équation précédente sont égales par la démonstration faite en premier lieu. Donc, pourvu que $|\Delta t|$ soit assez petit, $\Delta\psi = 0$ et $\psi'(t) = 0$.

2°) Si $\varphi'(t) = 0$, désignons par μ une valeur moyenne de $f(x)$ dans l'intervalle de $\varphi(t)$ à $\varphi(t) + \Delta\varphi$ et par μ' une valeur moyenne de $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ dans l'intervalle de t à $t + \Delta t$; le théorème de la moyenne, appliqué à chaque intégrale, donne

$$\Delta\psi = \mu\Delta\varphi - \mu'\Delta t,$$

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta t} = \mu\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} - \mu'.$$

Si Δt tend vers zéro, $\Delta\varphi : \Delta t$ tend vers $\varphi'(t)$ qui est nul par hypothèse ; μ' tend aussi vers zéro, car on a $(0 < \theta < 1)$.

$$\mu' = f[\varphi(t + \theta\Delta t)]\varphi'(t + \theta\Delta t).$$

Donc $d\psi : dt$ ou $\psi'(t)$ est encore égal à zéro.

215. Intégrales définies généralisées. — La définition de l'intégrale définie suppose essentiellement que les limites a et b sont finies et que la fonction $f(x)$ est bornée dans l'intervalle (a, b). Si ces conditions n'ont pas lieu, il faut de nouvelles définitions.

1° Soit $f(x)$ une fonction bornée et intégrable dans l'intervalle (a, x'), quel que soit x', pourvu que x' soit $> a$. L'intégrale de $f(x)\,dx$ prise entre les limites a et ∞ sera, par définition, la limite de l'intégrale prise entre a et x' quand x' tend vers l'infini. On a donc

$$(7) \qquad \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x'=\infty} \int_a^{x'} f(x)\,dx.$$

Si cette limite n'existait pas, l'intégrale à limite infinie n'existerait pas non plus. L'existence de l'intégrale à limite infinie n'est donc pas toujours certaine, même quand la fonction $f(x)$ est continue. Il y a des règles qui permettent, dans des cas étendus, de constater si l'intégrale à limite infinie a une valeur déterminée ou non. Nous nous en occuperons dans une autre partie du cours. Pour le moment, nous nous contenterons de remarquer que, si l'intégration indéfinie peut être effectuée, la définition de l'intégrale à limite infinie suffit pour s'assurer de son existence et la calculer. On aura, par exemple,

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{x'=\infty} \int_0^{x'} e^{-x}\,dx = \lim_{x'=\infty} \Big[1 - e^{-x}\Big]_0^{x'} = 1.$$

Les intégrales prises entre les limites $-\infty$ et b, ou entre les limites $-\infty$ et $+\infty$ s'interprètent d'une manière analogue.

2° Soit maintenant $f(x)$ une fonction qui augmente indéfiniment quand x tend vers b, mais qui est bornée et intégrable dans l'intervalle $(a, b-\varepsilon)$, quel que petit que soit ε (a étant $< b$). On posera, par définition,

$$(8) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

L'existence de l'intégrale est liée à celle de cette limite. Lorsque l'intégration indéfinie peut être effectuée en pratique, cette définition suffit pour le calcul. On aura, par exemple,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim \arc\sin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

3° Si la fonction $f(x)$ augmentait indéfiniment quand x tend vers a, mais était bornée et intégrable dans l'intervalle $(a+\varepsilon, b)$ quelque petit que fût b, on poserait d'une manière analogue

$$(9) \qquad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

L'existence de l'intégrale serait liée à celle de cette limite.

4° Supposons enfin que $f(x)$ devienne infinie pour un nombre limité de valeurs de x dans l'intervalle (a, b). On peut partager cet intervalle en plusieurs autres où $f(x)$ n'est plus infinie qu'à l'une des limites. L'intégrale de $f(x)dx$ étendue à l'intervalle total (a, b) sera, par définition, la somme des intégrales étendues à chacun des intervalles partiels. Pour que l'intégrale existe dans l'intervalle (a, b), il faut donc qu'elle existe dans chacun des intervalles partiels, ce qui pourra se vérifier au moyen des deux définitions précédentes.

216. **Extension de la formule fondamentale au calcul des intégrales généralisées.** — I. Lorsque la fonction $f(x)$ est continue pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle (a, b) sauf pour un nombre limité de *valeurs exceptionnelles* qui peuvent la rendre infinie, l'équation fondamentale pour le calcul des intégrales définies, savoir

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

subsiste, pourvu que la fonction $F(x)$ soit continue dans tout l'intervalle (a, b) sans exception et qu'elle ait $f(x)$ pour dérivée, sauf pour les valeurs exceptionnelles.

En effet, si b est la seule valeur exceptionnelle, l'équation (**8**) donne

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\,[F(b-\varepsilon) - F(a)] = F(b) - F(a).$$

La conclusion est analogue, si a est la seule valeur exceptionnelle. Enfin, s'il y a des valeurs exceptionnelles intermédiaires entre a et b, on peut raisonner comme s'il n'y en avait qu'une seule c ; et il vient

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c + \int_c^b f(x)\,dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c).$$

Comme $F(c)$ disparaît, on retrouve encore la même équation.

II. Si les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ sont continues pour toutes les valeurs de x supérieurs à a, et si $F(x)$ tend vers une limite déterminée $F(\infty)$ quand x tend vers l'infini, l'équation fondamentale

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = F(\infty) - F(a)$$

subsistera aussi, car, en appliquant l'équation (**7**), il viendra

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim\,[F(x') - F(a)] = F(\infty) - F(a).$$

217. **Application des théorèmes généraux au calcul d'intégrales définies particulières** — Nous allons d'abord indiquer quelques applications de la formule fondamentale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$$

I. De la relation $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, on tire

$$\int_0^1 x^a\,dx = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \frac{1}{a+1}.$$

II. De la relation $\int \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} + C$, on tire

$$\int_0^\pi \cos ax\, dx = \left[\frac{\sin ax}{a}\right]_0^\pi = \frac{\sin a\pi}{a}.$$

Donc, si a est un entier différent de zéro,

$$\int_0^\pi \cos ax\, dx = 0.$$

On conclut de là que, si m et n sont des entiers différents,

$$\int_0^\pi \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(m+n)x\, dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(m-n)x\, dx = 0;$$

tandis que, si, au contraire, $m = n$,

$$\int_0^\pi \cos^2 mx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 + \cos 2mx)\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

III. De la relation du n° 163.

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{bx}{a} + C,$$

on déduit

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab}\left[\operatorname{arc\,tg} \infty - \operatorname{arc\,tg} 0\right] = \frac{\pi}{2ab}.$$

IV. De la relation du même numéro

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{2ab} \operatorname{Log} \frac{a + bx}{a - bx} + C,$$

on déduit

$$\int_0^1 \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{2ab} \operatorname{Log} \frac{a + b}{a - b}.$$

V. Si $(a + b)$ et $(a - b)$ sont positifs, on a la formule (n° 189)

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C,$$

on en déduit

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\left[\operatorname{arc\,tg} \infty - \operatorname{arc\,tg} 0\right] = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Si, au contraire, $a + b$ est > 0 et $a - b < 0$, on a

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{Log} \left(\frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x}{a + b\cos x}\right) + C,$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{Log}\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}\right).$$

VI. Des deux relations du nº 193, savoir

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2 + b^2} + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2} + C,$$

on déduit, a étant > 0,

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

218. Intégrales obtenues par des formules de réduction. — I. Les formules de réduction se simplifient souvent quand on les applique aux intégrales définies. Ainsi, de la formule

$$\int x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1} e^{-x} dx,$$

on conclut, si n est positif,

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx.$$

Si, de plus, n est entier, cette formule donnera de proche en proche

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!\int_0^{\infty} e^{-x} dx = n!$$

II. Lorsque m et n sont des entiers positifs, les formules (3) et (4) du nº 196 donnent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{m-1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{m-1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx.$$

Ce sont des formules de réduction. La première subsiste pour $n = 0$ et la seconde pour $m = 0$, auxquels cas il vient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\, dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\, dx.$$

Ces quatre formules permettent de réduire de proche en proche les exposants m et n à 0 ou à 1. On obtient alors l'une des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\, dx,$$

ayant respectivement pour valeurs :

$$\frac{\pi}{2}, \qquad 1, \qquad 1, \qquad \frac{1}{2}.$$

Pour écrire plus brièvement les expressions numériques auxquelles conduisent les formules de réduction, convenons de représenter par $m\,!!$ le produit de tous les entiers non supérieurs à m mais de même parité que m. Il viendra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\, dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)\,!!}{m\,!!}\dfrac{\pi}{2} & (m \text{ pair}), \\[2ex] \dfrac{(m-1)\,!!}{m\,!!} & (m \text{ impair}), \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)\,!!\,(n-1)\,!!}{(m+n)\,!!}\dfrac{\pi}{2} & (m \text{ et } n \text{ pairs}), \\[2ex] \dfrac{(m-1)\,!!\,(n-1)\,!!}{(m+n)\,!!} & \left(\begin{array}{l} m \text{ ou } n \text{ ou tous} \\ \text{deux impairs.} \end{array}\right) \end{cases}$$

Lorsque m et n sont impairs tous les deux, soient $m = 2p + 1$, $n = 2q + 1$, la formule précédente se simplifie et il vient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x \cos^{2q+1} x\, dx = \frac{1}{2}\frac{p\,!\,q\,!}{(p+q+1)!}.$$

219. Exemples de changements de variables. — I. Par la substitution $x = \operatorname{tg} z$, il vient, eu égard aux résultats précédents (m entier et positif),

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-2} z\, dz = \frac{(2m-3)\,!!}{(2m-2)\,!!}\frac{\pi}{2}.$$

II. Par la substitution $x = \sin z$, il vient (m entier et positif)

$$\int_0^1 \frac{x^m\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m z\, dz = \begin{cases} \dfrac{(m-1)\,!!}{m\,!!}\dfrac{\pi}{2} & (m \text{ pair}), \\[2ex] \dfrac{(m-1)\,!!}{m\,!!} & (m \text{ impair}). \end{cases}$$

III. Par la substitution $\sqrt{ax - x^2} = az$ d'où $x = a : (1 + z^2)$, il vient (m entier et positif)

$$\int_0^a \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax - x^2}} = 2a^m \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z^2)^{m+1}} = \frac{(2m-1)\,!!}{(2m)\,!!}\,\pi a^m.$$

IV. Par la substitution $x = \sin^2 z$, il vient (p, q entiers et positifs)

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q\,dx = 2\int_0^1 \sin^{2p+1} z \cos^{2q+1} z\,dz = \frac{p\,!\,q\,!}{(p+q+1)\,!}.$$

V. Par la substitution $x = z : (1+z)$, la même intégrale se transforme dans la suivante :

$$\int_0^\infty \frac{z^p\,dz}{(1+z)^{p+q+2}} = \frac{p\,!\,q\,!}{(p+q+1)\,!}$$

220. Formule de Wallis. — Soient n un nombre entier et positif et x une variable comprise entre 0 et $\pi : 2$; on a

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x,$$

par conséquent,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx$$

et, en remplaçant les intégrales par leurs valeurs numériques,

$$\frac{(2n)\,!!}{(2n+1)\,!!} < \frac{(2n-1)\,!!}{(2n)\,!!}\,\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)\,!!}{(2n-1)\,!!}.$$

On déduit de ces inégalités

$$\left[\frac{(2n)\,!!}{(2n-1)\,!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)\,!!}{(2n-1)\,!!}\right]^2 \frac{1}{2n}.$$

On peut donc écrire, θ étant compris entre 0 et 1,

$$\left[\frac{(2n)\,!!}{(2n-1)\,!!}\right]^2 \frac{1}{2n} = \left(1 + \frac{\theta}{2n}\right)\frac{\pi}{2}.$$

Faisant tendre n vers l'infini, on obtient la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \left[\frac{(2n)\,!!}{(2n-1)\,!!}\right]^2 \frac{1}{2n}.$$

221. Intégrales obtenues par des artifices de calcul. — L'intégration indéfinie est le procédé le plus général et le plus important pour calculer les intégrales définies, mais ce n'est pas le seul. Certaines intégrales définies peuvent se déterminer par des artifices de calcul, sans qu'il soit possible d'obtenir sous forme finie les intégrales indéfinies correspondantes. En voici deux exemples assez simples :

I. Par décomposition de l'intervalle d'intégration, on obtient

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x\, dx}{1+\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1+\cos^2 x}.$$

Par la substitution $x = \pi - z$, la dernière intégrale devient

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi - z) \sin z\, dz}{1+\cos^2 z} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z\, dz}{1+\cos^2 z} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z \sin z\, dz}{1+\cos^2 z}.$$

Substituons cette valeur dans l'équation précédente et réduisons, nous trouvons

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \pi \Big[- \operatorname{arc\,tg} (\cos x) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

II. Considérons, en second lieu, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} (\sin x)\, dx.$$

Cette intégrale est déterminée quoique $\operatorname{Log} (\sin x)$ soit infini pour $x = 0$. En effet, on a, quelque petit que soit le nombre positif ε,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \operatorname{Log} (\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \operatorname{Log} x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \operatorname{Log} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

$$= \Big[x (\operatorname{Log} x - 1) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} + \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \operatorname{Log} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Mais $x \operatorname{Log} x$ s'annule pour $x = 0$ et $\operatorname{Log} (\sin x : x)$ reste fini ; il vient donc pour $\varepsilon = 0$, le second membre étant bien déterminé,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} (\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \left[\operatorname{Log} \frac{\pi}{2} - 1 \right] + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Donc le premier membre est bien déterminé aussi. Ce premier point établi, on a, d'une part,

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Log} (\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} (\sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{Log} (\sin x)\, dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} (\sin x)\, dx,$$

car par la substitution $x = \pi - z$ l'intégrale aux limites $\pi : 2$ et π se transforme dans celle aux limites 0 et $\pi : 2$.

D'autre part, de $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, on déduit, en prenant les logarithmes et en intégrant,

$$\int_0^\pi \operatorname{Log} (\sin x)\, dx = \pi \operatorname{Log} 2 + \int_0^\pi \operatorname{Log} \left(\sin \frac{x}{2}\right) dx + \int_0^\pi \operatorname{Log} \left(\cos \frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \pi \operatorname{Log} 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} (\sin x)\, dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} (\cos x)\, dx$$

$$= \pi \operatorname{Log} 2 + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} (\sin x)\, dx,$$

car les deux intégrales aux limites 0 et $\pi : 2$ se ramènent l'une à l'autre par la substitution $x = \pi : 2 - z$ et sont, par conséquent, égales.

De la comparaison des valeurs obtenues de part et d'autre pour la même intégrale, on déduit, en réduisant,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} (\sin x)\, dx = -\frac{\pi}{2} \operatorname{Log} 2.$$

§ 3. Intégrales par excès et par défaut. Intégrales définies les plus générales.

222. Intégrales par excès et par défaut. — Soit $f(x)$ une fonction simple et bornée dans un intervalle (a, b); on sait que, si l'on décompose cet intervalle en un nombre indéfiniment croissant n de parties consécutives δ_i et qu'on désigne par M_i et m_i les limites supérieure et inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle δ_i, les deux sommes

(1) $$\sum_{i=1}^{n} M_i \delta_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_i,$$

tendent vers des limites déterminées L et l, indépendantes du mode de subdivision adopté (nº 203). Nous appellerons ces limites les *intégrales par excès* et *par défaut* de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) et nous les représenterons dorénavant avec les notations

(2) $$^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{et} \qquad ^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^b f(x)\, dx.$$

On sait encore que, si ces deux limites sont égales, leur valeur commune se nomme une intégrale définie et se désigne par le symbole

(3) $$\int_a^b f(x)\, dx.$$

On dit, dans ce cas, que la fonction $f(x)$ est intégrable dans l'intervalle (a, b).

223. Limites d'indétermination de l'intégrale définie d'une fonction non intégrable. — Lorsque la fonction $f(x)$ est intégrable dans l'intervalle (a, b), on sait (nº 206) que l'on a, les points ξ_i étant arbitrairement choisis dans les intervalles δ_i,

$$(4) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i.$$

Lorsque $f(x)$ n'est pas intégrable, cette limite n'existe plus, mais son indétermination n'est pas complète. Les inégalités

$$\sum_{i=1}^{n} M_i\delta_i \overline{\overline{>}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i \overline{\overline{>}} \sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i.$$

montrent que, lorsque tous les δ_i tendent vers zéro, l'expression du milieu a pour limites d'indétermination les intégrales par excès et par défaut. La limite qui figure au second membre de l'équation (**4**) est donc indéterminée, mais comprise entre les expressions (**2**). Nous conviendrons de conserver l'équation (**4**) comme définition de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

même au cas où $f(x)$ n'est pas intégrable et, par conséquent, d'attribuer à cette intégrale une valeur indéterminée, mais comprise dans l'intervalle des expressions (**2**).

224. Extension des définitions aux fonctions qui présentent des points d'indétermination partielle. — Jusqu'à présent, pour plus de simplicité seulement, nous avons formé les deux sommes (**1**) du numéro précédent et considéré leurs limites, en supposant que la fonction $f(x)$ était simple, c'est-à-dire complètement déterminée pour chaque valeur de x. Rien n'empêche de former des sommes analogues dans le cas où la fonction $f(x)$ est indéterminée pour certaines valeurs de x, pourvu que ses *limites d'indétermination* soient déterminées pour chacune de ces valeurs. On conçoit, en effet, que la fonction puisse prendre, pour chacune des valeurs de x, toutes les valeurs comprises entre les limites d'indétermination correspondantes. La connaissance de ces dernières limites permet donc d'assigner aussi les limites supérieure et inférieure de $f(x)$ dans un intervalle quelconque. Elle permet donc de former les sommes (**1**) considérées plus haut. D'ailleurs le fait de l'indétermination n'altère en rien nos raisonnements, de sorte que ces deux sommes tendent encore vers des limites déterminées. Ce sont les *intégrales par défaut* et *par excès* de la fonction et elles se représentent par les expressions (**2**).

Si ces deux limites sont égales, la fonction $f(x)$ est *intégrable* et cette

limite commune se représente par l'expression (**3**). Enfin, cette limite commune est encore la limite définie par l'équation (**4**) de quelque manière que l'on choisisse $f(\xi_i)$ entre ses limites d'indétermination.

Ajoutons une dernière remarque. La définition de la discontinuité d'une fonction et le théorème du n° 33 de l'introduction subsistent sans aucun changement pour les fonctions qui présentent des points d'indétermination partielle de la nature de ceux que nous venons d'examiner. Il est clair que la discontinuité d'une fonction en un point semblable est au moins égale à l'amplitude de l'indétermination en ce point ou à l'écart des deux limites d'indétermination.

225. Propriétés des intégrales par excès ou par défaut. — Parmi les propriétés que nous allons énumérer, les deux premières ont déjà été démontrées (n° 204), la notation seule sera changée.

I. Soit c un point intermédiaire entre a et b ; on a

$$\overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} f(x)dx = \overset{\mathrm{E}}{\int_a^c} f(x)\,dx + \overset{\mathrm{E}}{\int_c^b} f(x)dx.$$

et une relation analogue pour l'intégrale par défaut.

II. Soit μ une certaine moyenne entre les valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) ; on a

$$\overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} f(x)\,dx = \mu(b-a).$$

et une relation analogue pour l'intégrale par défaut.

III. Soit c un facteur constant et positif ; on a

$$\overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} c\,f(x)dx = c\overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} f(x)\,dx$$

et une relation analogue pour l'intégrale par défaut.

Si c est négatif, on peut aussi le faire sortir du signe $\int$, seulement il faut remplacer l'intégrale par excès par une intégrale par défaut ou réciproquement.

C'est une conséquence immédiate de la définition de l'intégrale.

IV. Soient $f'(x)$, $f''(x)$,... des fonctions bornées ; on a

$$\overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} [f'(x) + f''(x) + \cdots]\,dx \leq \overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} f'(x)\,dx + \overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} f''(x)\,dx + \ldots$$

et une inégalité de sens contraire pour les intégrales par défaut.

En effet, décomposons l'intervalle (a, b) en parties infiniment petites δ_i ; soient M_i et m_i, M'_i et m'_i, M''_i et m''_i,... les limites supérieures et inférieures de $(f' + f'' + \cdots)$, de f', de f'',... dans l'intervalle δ_i. La limite M_i ne peut pas être supérieure à $M'_i + M''_i + \cdots$ et m_i ne peut pas être moindre que $m'_i + m''_i + \cdots$ On aura donc

$$\Sigma M_i\delta_i \leq \Sigma M'_i\delta_i + \Sigma M''_i\delta_i + \ldots$$

et une relation de sens contraire pour les limites inférieures des fonctions. En passant à la limite, on obtient les inégalités à démontrer.

V. Soient $f'(x)$ et $f''(x)$ deux fonctions bornées ; on a

$$ {}^{\mathrm{E}}\!\int_a^b [f'(x) - f''(x)]\,dx \leqq {}^{\mathrm{E}}\!\int_a^b f'(x)\,dx - {}^{\mathrm{E}}\!\int_a^b f''(x)\,dx $$

et une relation de sens contraire pour les intégrales par défaut.

Cette propriété se démontre comme la précédente, en observant que l'on a dans chaque intervalle δ_i

$$ \mathrm{M}_i \geqq \mathrm{M}'_i - \mathrm{M}''_i, \qquad m_i \leqq m'_i - m''_i. $$

226. Propriétés des fonctions intégrables. — I. *Soient $f(x)$ une fonction intégrable dans l'intervalle (a, b) et c une constante ; la fonction $cf(x)$ sera intégrable dans le même intervalle.*

Cette conséquence résulte immédiatement de la propriété III du numéro précédent.

II. *Soient $f'(x)$, $f''(x)$,... des fonctions intégrables ; leur somme sera aussi intégrable.*

En effet, cette conséquence résulte immédiatement des inégalités établies au numéro précédent (propriété IV).

III. *Le produit de deux fonctions intégrables est encore intégrable.*

Soit $f(x)$ le produit de deux fonctions f' et f'' intégrables dans l'intervalle (a, b). Décomposons cet intervalle en parties consécutives δ_i et soient M'_i et m'_i, M''_i et m''_i, M_i et m_i les limites supérieures et inférieures de f', f'' et f dans chaque intervalle δ_i.

Supposons d'abord que f' et f'' et, par suite, f soient constamment positifs. On aura

$$ \mathrm{M}_i \leqq \mathrm{M}'_i\mathrm{M}''_i, \qquad m_i \geqq m'_i m''_i, \qquad \mathrm{M}_i - m_i \leqq \mathrm{M}'_i\mathrm{M}''_i - m'_i m''_i. $$

La dernière inégalité peut s'écrire

$$ \mathrm{M}_i - m_i \leqq \mathrm{M}''_i (\mathrm{M}'_i - m'_i) + m'_i (\mathrm{M}''_i - m''_i). $$

Soient M' et M'' les limites supérieures de f' et de f'' dans l'intervalle (a, b) ; on aura *a fortiori*

$$ \mathrm{M}_i - m_i \leqq \mathrm{M}''(\mathrm{M}'_i - m'_i) + \mathrm{M}'(\mathrm{M}''_i - m''_i) $$

et on en conclut

$$ \lim \Sigma (\mathrm{M}_i - m_i)\delta_i \leqq \mathrm{M}'' \lim \Sigma (\mathrm{M}'_i - m'_i)\delta_i + \mathrm{M}' \lim \Sigma (\mathrm{M}''_i - m''_i)\delta_i. $$

Les deux limites du second membre sont nulles par hypothèse, car f' et f'' sont intégrables. Donc le premier membre est nul aussi, ce qui prouve le théorème.

Passons au cas où f' et f'' sont de signes quelconques. Ce cas se ramène au précédent. Soient, en effet, m' et m'' les limites inférieures de ces deux fonctions dans l'intervalle (a, b). On aura

$$ f'f'' = (f' - m')(f'' - m'') + m'f'' + m''f' - m'm''. $$

Or, le second membre est une somme de fonctions intégrables, car le premier produit $(f' - m')(f'' - m'')$, ayant ses facteurs positifs, est intégrable en vertu de la démonstration précédente. Donc $f'f''$ est intégrable en vertu de la propriété II.

IV. *Si la fonction f est intégrable dans l'intervalle (a, b) et si ses limites supérieure et inférieure M et m sont de même signe, la fonction $1 : f$ est intégrable dans le même intervalle.*

Supposons, pour fixer les idées, M et m positifs. L'oscillation de $1 : f$ dans l'intervalle δ_i sera

$$\frac{1}{m_i} - \frac{1}{M_i} = \frac{M_i - m_i}{M_i m_i} < \frac{1}{m^2}(M_i - m_i).$$

Par conséquent,

$$\lim \Sigma \left(\frac{1}{m_i} - \frac{1}{M_i}\right)\delta_i < \frac{1}{m^2} \lim \Sigma (M_i - m_i)\delta_i = 0.$$

227. Expression par une intégrale de la différence entre les intégrales par excès et par défaut. — Soit $f(x)$ une fonction bornée dans l'intervalle (a, b). Représentons par

$$\text{disc.}\, f(x)$$

la discontinuité de $f(x)$ au point x (nº 25). On aura la relation suivante :

$$(5) \qquad \text{E}\int_a^b f(x)\,dx - \text{D}\int_a^b f(x)\,dx = \text{E}\int_a^b \text{disc.}\, f(x)\,dx.$$

Décomposons l'intervalle (a, b) en parties consécutives δ_i et désignons par M_i et m_i les limites supérieure et inférieure de $f(x)$, par Δ_i la limite supérieure de disc. $f(x)$ dans chaque intervalle δ_i. La démonstration de la relation (5) repose sur le lemme suivant :

Quelque petit que soit le nombre positif ε, on peut trouver un mode de décomposition de (a, b) en parties δ_i aussi petites que l'on veut, tel qu'on ait dans chacune d'elles

$$M_i - m_i < \Delta_i + \varepsilon.$$

En effet, si, ε étant donné, aucun mode de décomposition de l'intervalle (a, b) ne pouvait vérifier la condition précédente, en raisonnant comme dans la démonstration du théorème du nº 33, on prouverait qu'il existe au moins un point c dans l'intervalle (a, b), tel qu'une décomposition de l'intervalle $(c - \delta, c + \delta)$ vérifiant la même condition fût impossible pour des valeurs aussi petites qu'on veut de δ. Or, cette conclusion est inexacte, car, à partir d'une valeur suffisamment petite de δ, l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle $(c - \delta, c + \delta)$ sera inférieure à disc. $f(c) + \varepsilon$.

En second lieu, on peut vérifier la condition proposée par un mode de décomposition en parties aussi petites que l'on veut. En effet, après

avoir préalablement décomposé (a, b) en parties aussi petites que l'on veut, on pourra encore, en vertu du raisonnement précédent, subdiviser chacune de ces parties de manière à réaliser la condition proposée.

Du lemme précédent, on déduit facilement la démonstration de l'équation (5). En effet, considérons un mode de subdivisions en parties δ_i vérifiant la condition du lemme. On aura, dans chacune d'elles,

$$\Delta_i < M_i - m_i < \Delta_i + \varepsilon ;$$

par conséquent, la somme s'étendant à toutes les parties,

$$\Sigma \Delta_i \delta_i \overline{<} \Sigma M_i \delta_i - \Sigma m_i \delta_i < \Sigma \Delta_i \delta_i + \varepsilon (b - a).$$

Faisons tendre à la fois tous les δ_i et ε vers zéro. Les deux membres extrêmes de ces inégalités tendent vers la même limite, qui est, par définition, le second membre de l'équation (5). Donc la limite de l'expression du milieu, qui est le premier membre de cette équation, sera la même que la précédente. L'équation (5) est donc démontrée.

§ 4. Ensembles. Formes diverses de la condition d'intégrabilité.

228. Points limites d'un ensemble. — Considérons un système de valeurs de x en nombre fini ou infini. Chaque valeur de x s'appelle *un point* ; la collection des points considérés s'appelle *un ensemble*.

Un ensemble E est *borné supérieurement (inférieurement)*, si tous les nombres qui le composent sont inférieurs (supérieurs) à un nombre fixe. Si tous les points d'un ensemble sont compris entre a et b, nous dirons que l'ensemble est borné par les points a et b.

On nomme *point limite* d'un ensemble E tout point p tel que l'intervalle $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ contienne une infinité de points de E, quelque petit que soit le nombre positif ε. Dans ce cas, p peut être considéré comme la limite d'une suite de points de E et réciproquement.

Tout ensemble borné E *qui contient une infinité d'éléments admet au moins un point limite.*

Pour le montrer, supposons E borné par les points a et b. Partageons l'intervalle (a, b) en deux parties égales. Une des deux moitiés au moins contiendra encore une infinité de points de E. Partageons encore en deux la moitié qui jouit de cette propriété et continuons ainsi de suite indéfiniment. Nous formerons ainsi une suite d'intervalles, successivement intérieurs les uns aux autres, indéfiniment décroissants et contenant tous une infinité de points de E. Les limites de ces intervalles tendent vers un même point p qui sera un point limite de E.

229. Ensembles dérivés. — Si l'ensemble E contient une infinité de points, l'ensemble de ses points limites forme un nouvel ensemble E′ que

l'on appelle le dérivé de E (G. Cantor). Si E' contient encore une infinité de points, son dérivé E'' est le dérivé du second ordre de E, et ainsi de suite.

Un ensemble qui contient un nombre infini d'éléments est de *première espèce* s'il n'admet qu'un nombre limité de dérivés successifs ; il est de seconde espèce, s'il admet des dérivés de tous les ordres jusqu'à l'infini.

Un ensemble qui ne contient qu'un nombre limité de points est *de l'ordre zéro*. Un ensemble qui admet des dérivés des n premiers ordres mais pas davantage est *de l'ordre n* ; alors son dérivé de l'ordre n ne contient qu'un nombre limité de points.

230. Ensembles parfaits. — M. C. Jordan appelle *parfait* tout ensemble E qui contient son dérivé E'. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Tout ensemble dérivé est parfait.

Si un ensemble est composé d'un nombre limité de points, il n'admet aucun point limite et il est parfait. Supposons donc que le dérivé E' d'un ensemble E renferme une infinité de points et soit p un point limite de E'. Quel que soit ε, l'intervalle $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ renferme, par définition, une infinité de points de E'. Soit q l'un d'eux ; l'intervalle $(q - \varepsilon, q + \varepsilon)$ et *a fortiori* l'intervalle $(p - 2\varepsilon, p + 2\varepsilon)$, qui contient le précédent, renfermeront une infinité de points de E. Donc, 2ε étant aussi petit qu'on veut, p est un point limite de E et p appartient à E'. On voit ainsi que E', contenant tous ses points limites, contient son dérivé et est parfait.

231. Ensembles complémentaires. Points frontières — Soit E un ensemble. Si E ne contient pas tous les points possibles, les points qui n'appartiennent pas à E forment un nouvel ensemble E_1. Les deux ensembles E et E_1 se nomment *complémentaires*.

Soit a un point quelconque ; le point a se nomme un *point frontière* de E (ou de E_1), si, quelque petit que soit le nombre positif ε, l'intervalle $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ contient toujours des points de E et de son complémentaire E_1.

Tout point de E qui n'est pas un point frontière sera dit *intérieur* à E et tout point de E_1 qui n'est pas un point frontière sera dit *extérieur* à E.

Il résulte de ces définitions que, si a est un point intérieur (extérieur) à E, tout point de l'intervalle $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ sera aussi intérieur (extérieur) à E, à partir d'une valeur positive suffisamment petite de ε.

Les points frontières de deux ensembles complémentaires E et E_1 sont ceux qui appartiennent à la fois à l'un de ces deux ensembles et au dérivé de l'autre.

En effet, tout point a appartient à E ou à E_1. Pour fixer les idées, supposons que a soit un point de E.

D'une part, si a est un point frontière, l'intervalle $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ contient toujours, par définition, des points de E_1, donc a est un point limite de E_1, par conséquent, un point de E_1' et a est commun à E et E_1'. Réciproquement, si a est un point de E_1', l'intervalle $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ contient toujours une infinité de points de E_1 et, de plus, un point au moins de E (le point a). Donc a est un point frontière.

Soit $e(x)$ une fonction égale à 1 en tout point de E et à 0 en tout autre point. Il résulte immédiatement de leur définition que les points frontières de E sont les points de discontinuité de $e(x)$. On en conclut facilement la proposition suivante :

Tout ensemble E *qui ne contient pas tous les points possibles admet au moins un point frontière.*

En effet, entre deux valeurs de x appartenant respectivement à E et à son complémentaire E_1, la fonction $e(x)$ passe de 1 à 0. Comme elle ne peut passer par aucune valeur intermédiaire, elle possède au moins un point de discontinuité entre ces deux valeurs de x (nº 27, VI) et ce point est un point frontière.

232. Mesure des ensembles. — Soient E un ensemble de points, $e(x)$ une fonction égale à 1 en tout point de E et à 0 en tout autre point, a et b $(b > a)$ deux nombres quelconques ; formons les deux intégrales :

$$^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b e(x)\,dx, \qquad ^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^b e(x)\,dx.$$

La première s'appelle la *longueur extérieure* de E dans l'intervalle (a,b), la seconde sa *longueur intérieure*. Quand ces deux intégrales sont égales, leur valeur commune s'appelle simplement *longueur* de l'ensemble dans l'intervalle (a,b) et l'on dit que l'ensemble est *mesurable* dans cet intervalle. Lorsque l'ensemble E est borné par les points a et b, on dit que les expressions précédentes sont les *longueurs* de E, sans désignation d'intervalle.

Supposons que l'on décompose l'intervalle (a,b) en parties consécutives, infiniment petites, δ, et rappelons-nous la signification des deux intégrales précédentes, nous pourrons énoncer les propositions suivantes :

La longueur extérieure de l'ensemble E *dans l'intervalle* (a,b) *est la limite de la somme des parties* δ_i *qui contiennent un point au moins de* E ; *la longueur intérieure la limite de la somme des parties qui ne renferment que des points de* E. *Ces limites sont indépendantes du mode de subdivision de* (a,b) *en intervalles* δ_i.

Appliquons aux deux intégrales qui mesurent les longueurs extérieure et intérieure de E la relation du nº 227. Il vient

$$^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b e(x)\,dx - {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^b e(x)\,dx = {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b \mathrm{disc.}\,e(x)\,dx.$$

Or la fonction disc.$e(x)$ est égale à 1 en tout point frontière de E et à 0 partout ailleurs. D'où la proposition suivante, qu'il est d'ailleurs facile d'obtenir directement :

La différence entre les longueurs extérieure et intérieure d'un ensemble E *est égale à la longueur extérieure de l'ensemble de ses points frontières.*

Cette proposition conduit au théorème suivant :

Pour qu'un ensemble soit mesurable, il est nécessaire et suffisant que l'ensemble de ses points frontières soit de longueur nulle.

233. Ensembles de longueur nulle. — Les ensembles de longueur nulle présentent, comme on le voit, un intérêt particulier.

La condition nécessaire et suffisante pour que E soit de longueur nulle dans l'intervalle (a,b), est que l'on ait

$$ {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b e(x)\,dx = 0, $$

ou que la somme des parties δ_i de l'intervalle (a,b) qui contiennent un point au moins de E ait pour limite 0, quand toutes ces parties tendent vers 0. D'ailleurs, s'il en est ainsi pour un premier mode de subdivision il en sera de même pour tous.

Tout ensemble qui ne contient qu'un nombre limité de points est évidemment de longueur nulle. Plus généralement, on a le théorème suivant :

Tout ensemble de première espèce est de longueur nulle.

Le théorème est vrai pour un ensemble de l'ordre 0 ; pour le démontrer en général, supposons le déjà prouvé pour l'ordre $n - 1$ et montrons qu'il subsiste pour l'ordre n.

Soit E un ensemble de l'ordre n, borné par les points a et b. Son $n^{\text{ième}}$ dérivé $\mathrm{E}^{(n)}$ ne contient qu'un nombre limité de points. Supposons d'abord qu'il n'en contienne qu'un seul b; alors, quelque petit que soit ε, l'ensemble des points de E compris entre a et $b - \varepsilon$ et de l'ordre $(n - 1)$ et l'on a, par hypothèse,

$$ {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^{b-\varepsilon} e(x)\,dx = 0, $$

par conséquent,

$$ {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b e(x)\,dx = {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^{b-\varepsilon} + {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_{b-\varepsilon}^b e(x)\,dx = {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_{b-\varepsilon}^b e(x)\,dx < \varepsilon, $$

et ε, étant aussi petit qu'on veut, E est de longueur nulle.

Si le $n^{\text{ième}}$ dérivé ne contenait que le seul point a, le raisonnement serait analogue. Enfin, dans le cas général, on peut partager l'intervalle (a,b) en intervalles consécutifs, ne contenant plus de points de $\mathrm{E}^{(n)}$ qu'à l'une

des limites; par suite, E étant de longueur nulle dans chacune de ces parties, sera aussi de longueur nulle dans l'intervalle (a, b).

Les ensembles de longueur nulle possèdent une propriété qui présente au point de vue de l'intégration un grand intérêt :

Soit $f(x)$ une fonction bornée ; on ne modifie pas l'intégrale (par excès ou par défaut) de cette fonction dans l'intervalle (a, b), si l'on remplace $f(x)$ par une autre fonction bornée $f_1(x)$, pourvu que l'ensemble des points où $f(x)$ et $f_1(x)$ diffèrent l'une de l'autre ait une longueur nulle.

En effet, soient E l'ensemble de longueur nulle des points où f_1 diffère de f, $e(x)$ la fonction définie précédemment par rapport à E, M une limite supérieure de la différence absolue entre f et f_1. La fonction f_1 est, pour chaque valeur de x, comprise entre les deux limites :

$$f \pm \mathrm{M}\, e(x)\;;$$

donc son intégrale par excès est, en vertu des propriétés IV et V du n° 225, comprise entre les deux limites

$$\overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} f\,dx \pm \mathrm{M} \overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} e(x)\,dx$$

Le second terme étant nul, puisque E est de longueur nulle, il vient

$$\overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} f_1\,dx = \overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} f\,dx.$$

La démonstration se fait d'une manière analogue pour l'intégrale par défaut.

234. Formes diverses de la condition d'intégrabilité. — Considérons une fonction $f(x)$, bornée dans l'intervalle (a, b). La condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction soit intégrable, est que les deux sommes (n° 222) :

$$\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_i \delta_i, \qquad s = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_i$$

aient la même limite ou que la somme essentiellement positive :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{M}_i - m_i)\delta_i$$

ait pour limite 0 avec tous les intervalles δ_i.

Rappelons-nous (n° 203) que, lorsque tous les intervalles δ_i tendent vers 0, la somme S tend vers sa limite inférieure, la somme s vers sa limite supérieure. Il en résulte que Δ tend vers sa limite inférieure. De là cette première forme de la condition d'intégrabilité :

I. *Pour que $f(x)$ soit intégrable dans l'intervalle (a,b), il faut et il suffit qu'à tout nombre positif ε, si petit qu'il soit, corresponde un mode de subdivision pour lequel on ait $\Delta < \varepsilon$.*

En effet, dans ce cas, Δ, qui est essentiellement positif, a pour limite inférieure 0 et, par conséquent, tend vers zéro avec tous les δ_i.

La formule du n° 227 fournit une autre expression de la condition d'intégrabilité :

II. *La condition d'intégrabilité d'une fonction bornée $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) est que l'on ait*

$$\overline{\int_a^b} \text{disc. } f(x)\, dx = 0.$$

Telle est, en effet, la condition d'égalité des deux intégrales par excès et par défaut.

Cette condition peut être présentée sous une forme d'une vérification plus commode en pratique. A cet effet, soit ε un nombre positif quelconque. Désignons par E_ε l'ensemble des points de l'intervalle (a, b) où la discontinuité de $f(x)$ est $=$ ou $> \varepsilon$. Cet ensemble dépend généralement de ε. La considération de l'ensemble E_ε conduit à la proposition suivante :

III. *La condition d'intégrabilité d'une fonction bornée $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) est que E_ε soit de longueur nulle, quelque petit que soit ε.*

En effet, soit $e(x)$ une fonction égale à 1 en tout point de E_ε et à 0 partout ailleurs et désignons par $M - m$ l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) ; on a évidemment, pour toute valeur de x dans cet intervalle,

$$\varepsilon\, e(x) \leq \text{disc. } f(x) \leq \varepsilon + (M - m)\, e(x).$$

Multiplions par dx et intégrons par excès entre a et b ; il viendra, E_ε désignant aussi la longueur extérieure de l'ensemble E_ε,

$$\varepsilon E_\varepsilon \leq \overline{\int_a^b} \text{disc. } f(x)\, dx \leq \varepsilon (b - a) + (M - m) E_\varepsilon.$$

Ces inégalités prouvent évidemment que l'intégrale ne peut être nulle que si E_ε est toujours nul et que, réciproquement, l'intégrale sera nulle, si E_ε est constamment nul quand ε tend vers zéro.

De cette dernière proposition on conclut, comme cas particulier, la suivante :

Toute fonction bornée dans l'intervalle (a, b) qui, quelque petit que soit ε, n'a qu'un nombre limité de discontinuités supérieures à ε, est intégrable dans cet intervalle.

Cette proposition conduit elle-même au théorème suivant :

Toute fonction bornée $f(x)$ qui varie constamment dans le même sens dans l'intervalle (a, b) est intégrable.

En effet, la somme de toutes les discontinuités de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) ne pouvant surpasser la valeur absolue de $f(b) - f(a)$, le nombre de celles qui surpassent une quantité donnée ε est nécessairement limité.

235. Intégrales prises dans un ensemble. — Soient E un ensemble borné par les points a et b, $f(x)$ une fonction définie en tout point de E, c'est-à-dire ayant une valeur déterminée, ou, tout au moins, des limites d'indétermination déterminées en tout point de E.

Pour définir les intégrales de $f(x)$ dans l'ensemble E, considérons une fonction $f_1(x)$ égale à $f(x)$ en tout point de E et à O en tout autre point. Les deux intégrales

$$^{\mathrm{E}}\!\int_a^b f_1(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad ^{\mathrm{D}}\!\int_a^b f_1(x)\,dx$$

seront les *intégrales par excès et par défaut* de $f(x)$ dans l'ensemble E, Si ces deux intégrales sont égales, la fonction $f(x)$ est intégrable dans l'ensemble E.

Considérons, en particulier, le cas où la fonction $f(x)$ est définie dans l'intervalle (a, b). On peut énoncer la proposition suivante :

Si la fonction $f(x)$ est intégrable dans l'intervalle (a, b), elle est aussi intégrable dans tout ensemble mesurable E *borné par les points a et b.*

En effet, soit $e(x)$ une fonction égale à 1 en tout point de E et à O partout ailleurs. Cette fonction sera intégrable dans l'intervalle (a, b). Mais on a, dans l'intervalle (a, b),

$$f_1(x) = e(x)\,f(x).$$

Donc, f_1 étant le produit de deux fonctions intégrables, est intégrable dans l'intervalle (a, b).

CHAPITRE VII.

Formules fondamentales de la théorie des courbes planes.

---

§ 1. Tangente et normale aux courbes planes.

236. Représentation analytique d'une courbe plane. — En premier lieu, une courbe plane peut être considérée comme le lieu des points du plan dont les coordonnées cartésiennes x et y sont liées par une équation

$$(1) \qquad F(x, y) = 0.$$

Nous appellerons *point ordinaire* de la courbe, tout point où la fonction F est continue ainsi que ses dérivées partielles de tous les ordres et où les deux dérivées partielles F'_x et F'_y ne s'annulent pas simultanément. Les autres points de la courbe sont des points singuliers ; nous les supposerons, s'il en existe, isolés les uns des autres.

Dans le voisinage d'un point ordinaire où F'_y n'est pas nul, l'équation (1) définit une fonction implicite y de x (nº 142) [1] ; on peut donc résoudre l'équation (1) par rapport à y et la ramener, au moins implicitement, à la forme

$$(2) \qquad y = f(x),$$

la fonction $f(x)$ ayant, suivant les principes de dérivation des fonctions implicites, une dérivée finie et déterminée $-F'_x : F'_y$.

Si F'_y s'annulait en un point ordinaire, F'_x ne s'annulerait pas ; la résolution de l'équation pourrait se faire par rapport à x considérée comme fonction de y et l'on aurait une conclusion analogue à la précédente.

Nous raisonnerons le plus souvent sur l'équation de la courbe mise sous la forme (2), mais nos formules s'étendront aux équations de

[1] Le théorème du nº 142 est un peu abstrait pour les débutants. On peut s'en passer et admettre l'existence de la fonction implicite comme une condition de plus imposée à $F(x, y)$.

la forme (**1**) en vertu des règles de dérivation des fonctions implicites. Il faudra seulement se borner à considérer les points ordinaires de la courbe.

En second lieu, on peut considérer une courbe plane comme le lieu des positions successives d'un point mobile. On est alors conduit à exprimer les coordonnées x et y de ce point en fonctions continues d'un paramètre variable t. La courbe est alors définie par deux équations

$$(3) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

et l'on dit que ces formules fournissent une *représentation paramétrique* de la courbe. Quand nous ferons usage de cette représentation, nous supposerons que les fonctions φ et ψ sont continues ainsi que toutes leurs dérivées, sauf pour des valeurs exceptionnelles de t.

En supposant que t devienne égal à x, on reviendra comme cas particulier du mode de représentation (**3**) au mode de représentation (**2**).

Une courbe étant donnée sous la forme (**3**), il suffit d'éliminer t pour mettre son équation sous la forme (**1**). L'élimination pourra toujours se faire si l'une des deux équations est résoluble par rapport à t, car il suffira, cette résolution faite, de porter la valeur de t dans l'autre équation.

237. Tangente en coordonnées cartésiennes. — Considérons une courbe plane, rapportée à des axes rectangulaires ou obliques, et admettons d'abord que son équation soit de la forme

$$y = f(x).$$

Nous supposerons que cette fonction $f(x)$ ait une dérivée déterminée en tout point de la courbe dans l'intervalle des valeurs de x que l'on considère.

La tangente en un point M de la courbe est, comme on le sait déjà (n° 58), la limite d'une sécante qui passe par le point M et un autre point M′ de la courbe qui se rapproche indéfiniment du premier. Soient x, y les coordonnées du point M, $x + \Delta x$ et $y + \Delta y$ celles du point M′; l'équation de la sécante sera (ξ, η désignant les coordonnées courantes)

$$(4) \qquad \eta - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(\xi - x).$$

Faisons tendre le point M′ vers le point M ; Δx et Δy tendent vers 0

et leur quotient vers la dérivée y' de y par rapport à x. L'équation de la tangente au point M sera donc

(5) $$\eta - y = y'(\xi - x).$$

On met souvent l'équation de la tangente sous une forme plus symétrique. Si l'on remplace y' par $dy : dx$ dans l'équation (5), l'équation de la tangente peut s'écrire

(6) $$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy}.$$

Cette nouvelle forme a l'avantage d'être symétrique en x et en y. Elle est indépendante, comme nous le verrons, du mode de représentation adopté pour la courbe.

Supposons, en second lieu, que l'équation de la courbe soit de la forme plus générale

$$F(x, y) = 0.$$

Si le point M est un point ordinaire, une des deux dérivées F'_y ou F'_x est différente de zéro. On peut, en vertu de l'équation précédente, considérer y comme fonction de x ou x comme fonction de y. Si l'on considère y comme fonction de x, on trouve, en dérivant totalement l'équation de la courbe,

$$F'_x + y'F'_y = 0.$$

Remplaçant y' par sa valeur $- F'_x : F'_y$, l'équation (5) devient

(7) $$(\xi - x) F'_x + (\eta - y) F'_y = 0.$$

Cette forme de l'équation de la tangente est également symétrique en x et en y. Elle donne lieu au théorème suivant :

En tout point ordinaire d'une courbe $F(x, y) = 0$, *existe une tangente unique et bien déterminée. Son équation s'obtiendra en différentiant totalement celle de la courbe et en remplaçant* dx *par* $\xi - x$ *et* dy *par* $\eta - y$.

On remarquera que l'équation (7) tombe en défaut en un point singulier où F'_x et F'_y s'annulent à la fois, car l'équation disparait alors, son premier membre étant identiquement nul.

Considérons maintenant une représentation paramétrique de la courbe telle que

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

L'équation de la sécante MM' peut s'écrire

$$\frac{\xi - x}{\Delta x} = \frac{\eta - y}{\Delta y}.$$

Divisons les dénominateurs par l'accroissement Δt qu'il faut donner au paramètre pour passer de M à M'. Faisons tendre Δt vers 0, donc M' vers M et passons à la limite. Les quotients $\Delta x : \Delta t$ et $\Delta y : \Delta t$ tendent vers les dérivées supposées existantes x' et y' de x et de y par rapport à t. L'équation de la tangente sera donc

$$(8) \qquad \frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'}.$$

Cette équation suppose toutefois que x' et y' ne soient pas nuls tous deux au point M, auquel cas cette équation disparaîtrait encore identiquement.

On peut multiplier par dt les deux dénominateurs de l'équation (8), on retrouve ainsi l'équation (6) de la tangente.

L'équation de la tangente doit être modifiée lorsque x' et y' s'annulent tous deux au point M. Dans cette hypothèse, soient $x^{(n)}$ et $y^{(n)}$ les deux premières dérivées du même ordre qui ne s'annulent pas simultanément au point M. Toutes les dérivées précédentes étant nulles au point t, la formule de Taylor donne (n° 87)

$$\Delta x = \frac{(\Delta t)^n}{n!} \varphi^{(n)}(t + \theta\Delta t), \qquad \Delta y = \frac{(\Delta t)^n}{n!} \psi^{(n)}(t + \theta\Delta t).$$

Dans ce cas, avant de passer à la limite, nous diviserons donc les dénominateurs Δx et Δy de l'équation de la sécante par $(\Delta t)^n$. A la limite, Δt tendant vers 0, nous obtiendrons l'équation de la tangente sous la forme exceptionnelle

$$\frac{\xi - x}{x^{(n)}} = \frac{\eta - y}{y^{(n)}}.$$

Cette équation subsiste si $x^{(n)}$ ou $y^{(n)}$ seul s'annule. Mais elle se réduit, dans le premier cas, à $\xi - x = 0$, et dans le second, à $\eta - y = 0$.

238. Equations de la normale (axes rectangulaires). — La normale en un point M de la courbe est la perpendiculaire à la tangente, menée par ce point. Supposons les axes rectangulaires. Alors les coefficients angulaires de la tangente et de la normale sont inverses et de signes contraires. On pourra donc donner à la normale diverses formes correspondant à celles de la tangente.

La première correspond à l'équation (**6**) et est indépendante du mode de représentation de la courbe, c'est l'équation

(**9**) $$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0.$$

Si l'on considère y comme une fonction de x ayant pour dérivée y', on écrira l'équation de la normale sous la forme qui correspond à (**5**). Ce sera

(**10**) $$\eta - y = -\frac{\xi - x}{y'}.$$

Si la courbe a pour équation $F(x, y) = 0$, la normale en un point ordinaire aura pour équation

(**11**) $$\frac{\xi - x}{F'_x} = \frac{\eta - y}{F'_y}.$$

Enfin, si x et y sont considérés comme fonctions de t, on mettra l'équation de la normale sous la forme, qui correspond à (**8**),

(**12**) $$(\xi - x)\,x' + (\eta - y)\,y' = 0.$$

239. Calcul de quelques segments remarquables. — Certains segments, définis au moyen de la tangente et de la normale, se rencontrent naturellement dans l'étude des courbes planes ; nous les calculerons d'abord dans l'hypothèse d'une *représentation paramétrique,* c'est-à-dire en considérant x et y comme fonctions de t.

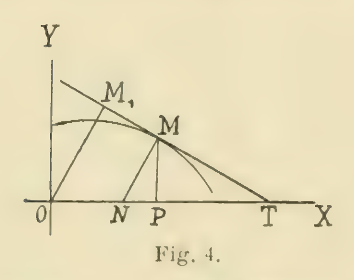


Fig. 4.

La *sous-tangente* S_t est le segment PT de l'axe des x (fig. 4), compté avec un signe déterminé du pied de l'ordonnée du point M jusqu'au point où la tangente coupe l'axe des x. Les sens positifs et négatifs sont les mêmes que pour les abscisses. La sous-tangente s'obtient donc en faisant $\eta = 0$ dans l'équation (**8**) de la tangente et en tirant de là la valeur de $\xi - x$. Il vient ainsi (en coordonnées rectangulaires ou obliques)

(**13**) $$S_t = -\frac{yx'}{y'}.$$

La *sous-normale* S_n se définit par rapport à la normale comme S_t par rapport à la tangente. C'est le segment PN de la figure. Sa

valeur s'obtient en posant $\eta = 0$ dans l'équation (12) et en tirant de là la valeur de $\xi - x$. Il vient (en coordonnées rectangulaires) :

$$(14) \qquad S_n = \frac{yy'}{x'}.$$

Les longueurs T *et* N *de la tangente et de la normale* sont les longueurs absolues MT et MN, comprises sur ces droites entre la courbe et l'axe des x. On a donc (en coordonnées rectangulaires) :

$$(15) \quad \begin{cases} T = \sqrt{S_t^2 + y^2} = \pm \dfrac{y}{y'}\sqrt{x'^2 + y'^2}, \\ N = \sqrt{S_n^2 + y^2} = \pm \dfrac{y}{x'}\sqrt{x'^2 + y'^2}. \end{cases}$$

La distance P *de l'origine à la tangente* se tire de l'équation de cette droite par un principe bien connu de géométrie analytique. On conclut de l'équation (8) (en coordonnées rectangulaires) :

$$(16) \qquad P = \pm \frac{x'y - y'x}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Si, au lieu de considérer x et y comme fonctions de t, on considère y comme fonction de x, il faut faire $x' = 1$ dans les formules précédentes. On trouve les expressions plus simples :

$$(17) \quad \begin{cases} S_t = -\dfrac{y}{y'}, \qquad S_n = yy', \qquad T = \pm \dfrac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2} \\ N = \pm\, y\sqrt{1 + y'^2} \qquad P = \pm \dfrac{y - y'x}{\sqrt{1 + y'^2}} \end{cases}$$

240. Applications (coordonnées rectangulaires). — I. *Parabole* : $y^2 = 2px$. Considérant y comme fonction de x, on a $yy' = p$. On trouve donc

$$\text{Tangente : } \eta y = p(\xi + x);$$
$$\text{Normale : } (\xi - x)\, y + (\eta - y)\, p = 0.$$

Les formules (17) donneront ensuite :

$$S_t = -\frac{y^2}{p}, \qquad S_n = p, \qquad T = \frac{y}{p}\sqrt{p^2 + y^2} \qquad N = \sqrt{p^2 + y^2}.$$

Donc, *dans la parabole, la sous-normale est constante.*

II. *Ellipse* : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. On trouve :

$$\text{Tangente : } \frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1\,;$$
$$\text{Normale : } \frac{a^2\xi}{x} - \frac{b^2\eta}{y} = a^2 - b^2 = c^2.$$

On se sert souvent d'une représentation paramétrique de l'ellipse. On exprime x et y en fonction de t (anomalie excentrique) par les équations :

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t.$$

On trouve ainsi, par les formules (**13**), (**14**), (**15**) et (**16**) :

$$S_t = a \sin t \operatorname{tg} t, \qquad S_n = -\frac{b^2}{a} \cos t, \qquad T = \operatorname{tg} t \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t},$$

$$N = \frac{b}{a} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}, \qquad P = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}.$$

On a donc la relation $PN = b^2$.

III. *Hyperbole* : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. On trouve :

$$\text{Tangente : } \frac{\xi x}{a^2} - \frac{\eta y}{b^2} = 1 ;$$

$$\text{Normale : } \frac{a^2 \xi}{x} + \frac{b^2 \eta}{y} = a^2 + b^2 = c^2.$$

IV. *Logarithmique* : $y = ae^{mx}$. On trouve, par la première des formules (**17**) :

$$S_t = \frac{1}{m} = \text{const.}$$

On rapprochera cette propriété de celle de la parabole, qui a une sous-normale constante.

V. *Cycloïde*. — La cycloïde (fig. 5) est décrite par un point M de la circonférence d'un cercle de rayon a qui roule sans glisser sur une droite fixe OX. Prenons cette droite pour axe des x, pour axe des y la perpendiculaire menée par le point décrivant au moment où il se trouve sur OX. Considérons une autre position du cercle générateur. Soit OA la quantité dont le point de contact s'est déplacé sur l'axe des x. D'après la définition du roulement, il s'est déplacé de la même quantité sur le cercle. Donc l'arc AM entre le point de contact et le point décrivant est égal à AO. Cela posé, soit t l'angle

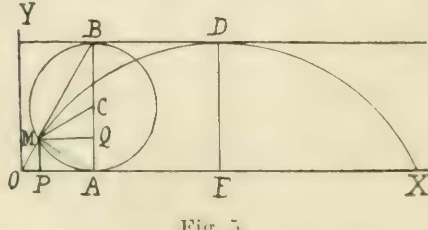


Fig. 5.

variable des rayons CA et CM. Exprimons x et y en fonction de t. On a OA = AM = at; d'où

$$(18)\quad \begin{cases} x = \mathrm{OA} - \mathrm{MQ} = a\,(t - \sin t) \\ y = \mathrm{AC} - \mathrm{QC} = a\,(1 - \cos t). \end{cases}$$

Ces équations fournissent une représentation paramétrique de la cycloïde. Elles montrent que la cycloïde se compose d'une suite illimitée d'*arcades* égales, situées au-dessus de OX, ayant respectivement pour hauteur le diamètre $2a$ et pour base la circonférence $2a\pi$ du cercle générateur.

On a, dans le cas actuel,

$$x' = a\,(1 - \cos t) = y, \qquad y' = a \sin t.$$

On en déduit la valeur de la sous-normale

$$\mathrm{S}_n = \frac{yy'}{x'} = y' = a \sin t.$$

Donc S_n est égale à la projection du rayon MC sur l'axe des x, et, par conséquent, la normale passe par le point de contact du cercle générateur.

241. Podaire d'une courbe plane. — On appelle podaire d'une courbe par rapport à un point O le lieu géométrique du pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la tangente.

Supposons que la courbe ait pour équation $\mathrm{F}(x,y) = 0$. Pour trouver celle de la podaire par rapport à l'origine, il faut éliminer x et y entre l'équation de la courbe et les deux suivantes :

$$(\xi - x)\,\mathrm{F}'_x + (\eta - y)\,\mathrm{F}'_y = 0, \qquad \xi\,\mathrm{F}'_y - \eta\,\mathrm{F}'_x = 0,$$

qui sont celles de la tangente et de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente. La relation qui en résulte entre ξ et η est l'équation de la podaire.

Considérons, par exemple, les *courbes de Lamé* ou *courbes triangulaires symétriques*, qui ont pour équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m \pm \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1\,;$$

les équations de la tangente et de la perpendiculaire sont :

$$\frac{\xi}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{m-1} \pm \frac{\eta}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{m-1} = 1,$$

$$\frac{a\xi}{\left(\frac{x}{a}\right)^{m-1}} = \frac{(\pm\, b\eta)}{\left(\frac{y}{b}\right)^{m-1}}.$$

Par les propriétés des fractions égales, on conclut de la dernière équation

$$\frac{\xi^2+\eta^2}{\frac{\xi}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{m-1} \pm \frac{\eta}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{m-1}} = \left[\frac{(a\xi)^{\frac{m}{m-1}} \pm (\pm b\eta)^{\frac{m}{m-1}}}{\left(\frac{x}{a}\right)^m \pm \left(\frac{y}{b}\right)^m}\right]^{\frac{m-1}{m}}$$

L'élimination de x et y est donc immédiate. La podaire par rapport à l'origine a pour équation

$$(\xi^2+\eta^2)^{\frac{m}{m-1}} = (a\xi)^{\frac{m}{m-1}} \pm (\pm b\eta)^{\frac{m}{m-1}}$$

L'*ellipse* et l'*hyperbole* en particulier, qui ont pour équations :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

auront pour podaires par rapport au centre :

$$(\xi^2+\eta^2)^2 = (a\xi)^2+(b\eta)^2, \qquad (\xi^2+\eta^2)^2 = (a\xi)^2-(b\eta)^2.$$

Si l'hyperbole est équilatère, $a=b$; sa podaire devient

$$(\xi^3+\eta^2)^2 = a^2(\xi^2-\eta^2).$$

C'est une *lemniscate de Bernouilli*, dont l'équation sera $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ en coordonnées polaires.

242. Coordonnées polaires. — Soient r et θ le rayon vecteur et l'argument d'un point du plan ; une courbe plane peut aussi être définie par une relation

$$F(r, \theta) = 0$$

entre les coordonnées d'un quelconque de ses points. Nous supposerons généralement que cette équation peut être résolue par rapport à r. L'équation de la courbe prend alors la forme

$$r = f(\theta).$$

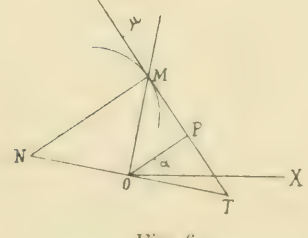


Fig. 6.

Soient r et θ les coordonnées d'un point particulier M de cette courbe (fig. 6). Menons la tangente en ce point. Abaissons du pôle la perpendiculaire OP sur la tangente. Soient p la longueur de cette droite et α l'angle qu'elle fait avec l'axe OX. L'équation de la tangente sera (ρ, τ désignant les coordonnées courantes)

$$\rho \cos(\tau - \alpha) = p.$$

Il s'agit de déterminer α et p. La tangente passant par M, on a d'abord

$$r \cos(\theta - \alpha) = p.$$

Admettons pour un instant que α et p se rapportent à la sécante MM'.

La relation précédente demeurera vérifiée quand on remplacera θ et r par les coordonnées $r + \Delta r$ et $\theta + \Delta\theta$ de M'. On aura donc

$$\Delta . r \cos(\theta - \alpha) = 0.$$

Divisons par $\Delta\theta$ et faisons tendre $\Delta\theta$ vers zéro. Nous obtiendrons à la limite la relation qui convient à la tangente, savoir

$$\frac{d}{d\theta} . r \cos(\theta - \alpha) = r' \cos(\theta - \alpha) - r \sin(\theta - \alpha) = 0 ;$$

d'où

$$\operatorname{tg}(\theta - \alpha) = \frac{r'}{r} .$$

On en conclut

$$\frac{\cos(\tau - \alpha)}{\cos(\theta - \alpha)} = \frac{\cos[(\tau - \theta) + (\theta - \alpha)]}{\cos(\theta - \alpha)} = \cos(\tau - \theta) - \frac{r'}{r} \sin(\tau - \theta)$$

L'équation de la tangente au point (r, θ) sera donc

$$(19) \qquad \frac{r}{\rho} = \cos(\tau - \theta) - \frac{r'}{r} \sin(\tau - \theta).$$

Soit μ l'angle du rayon vecteur OM avec la tangente menée dans le sens où θ va en croissant. Cet angle est le complémentaire de $(\theta - \alpha)$. Comme il est compris entre 0 et π, il est complètement déterminé par la formule

$$(20) \qquad \operatorname{tg} \mu = \frac{r}{r'} .$$

La *sous-tangente* S'_t et la *sous-normale* S'_n en coordonnées polaires sont les valeurs algébriques des segments OT et ON (fig. 6) compris sur la normale au rayon vecteur entre le pôle et la tangente ou la normale. On aura

$$(21) \qquad S'_t = \frac{r^2}{r'}, \qquad S'_n = r'.$$

Les segments ainsi calculés auront le signe de $\operatorname{tg}\mu$. On voit facilement qu'ils seront positifs ou négatifs, suivant qu'il faut faire tourner le rayon OM d'un angle droit dans le sens positif ou dans le sens négatif pour l'amener dans la direction de ON.

La tangente T' et la normale N' en coordonnées polaires sont les portions MT et MN de tangente et de normale comprises entre le point M et la perpendiculaire NOT menée par l'origine au rayon vecteur. On a, les expressions devant être prises positivement,

$$(22) \qquad T' = \frac{r}{r'} \sqrt{r^2 + r'^2}, \qquad N' = \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

La perpendiculaire abaissée du pôle sur la tangente a pour longueur p et pour inclinaison α ; on a

$$(23)\quad \begin{cases} p = r\cos(\theta - \alpha) = \dfrac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}, \\ \alpha = \theta - \operatorname{arctg}\dfrac{r'}{r}. \end{cases}$$

En éliminant θ entre les deux équations $\rho = p$ et $\tau = \alpha$ où les seconds membres seront exprimés en fonctions de θ, on obtiendra entre ρ et τ l'équation de la podaire de la courbe par rapport au pôle.

243. Applications (coordonnées polaires). — I. *Spirale d'Archimède :* $r = a\theta$. On a $r' = a$; on en conclut

$$S'_n = a, \qquad S'_t = a\theta^2 = r\theta.$$

Donc, dans la spirale d'Archimède, la sous-normale polaire est constante et la sous-tangente au point (r, θ) a même longueur qu'un arc de cercle de rayon r et d'ouverture θ. En particulier, la sous-tangente au premier point où la spirale recoupe l'axe polaire a même longueur que la circonférence décrite avec le rayon vecteur de ce point.

II. *Spirale logarithmique* : $r = ae^{m\theta}$. On a $r' = mae^{m\theta} = mr$. On en conclut.

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{1}{m}, \qquad S_t = \frac{r}{m}, \qquad S_n = mr,$$

$$p = \frac{r}{\sqrt{1 + m^2}}, \qquad \alpha = \theta - \mu.$$

Donc : 1°) La spirale logarithmique coupe le rayon vecteur sous un angle constant μ ; 2°) Les points T et N (fig. 6) décrivent des spirales semblables à la proposée ; 3°) La podaire a pour équation

$$\rho = \frac{ae^{m(\tau + \mu)}}{\sqrt{1 + m^2}} = a_1 e^{m\tau}$$

et c'est aussi une spirale semblable à la proposée.

Exercices.

1. Tangente, normale et segments correspondants pour l'hyperbole rapportée à ses asymptotes : $xy = a^2$.

2. Dans un cercle de rayon a, on mène un diamètre OO' et la tangente à l'une des extrémités O'. Par l'autre extrémité O, on mène une sécante quelconque coupant le cercle en P et la tangente en Q. On retranche de OQ un segment QM égal à OP. Le lieu du point M est une *cissoïde de Dioclès*. Trouver son équation, la tangente, la normale, etc.

R. On prend O comme pôle, OO′ comme axe polaire. L'équation est en coordonnées polaires

$$r = 2a\,(\sec\theta - \cos\theta),$$

et en coordonnées cartésiennes

$$y^2 = x^3 : (2a - x).$$

3. Un cercle de rayon a roule sur une droite OX ; un point fixé à ce cercle décrit une *cycloïde allongée* s'il est intérieur au cercle, une *cycloïde accourcie* s'il est extérieur au cercle. Trouver les équations de ces courbes, la tangente, la normale, etc.

R. Conservons les notations du n° 140 (V). Soit, en plus, h la distance du point décrivant au centre du cercle. On a

$$x = at - h\sin t, \qquad y = a - h\cos t.$$

La normale à la courbe passe encore par le point de contact du cercle et de la droite.

4. Un cercle de rayon b roule extérieurement sur un cercle de rayon a. On considère trois points M, M′ et M″, fixés au cercle mobile, le premier sur la circonférence, le second dans l'intérieur, le troisième à l'extérieur du cercle. Le point M décrit une *épicycloïde*, le point M′ une *épicycloïde allongée*, le point M″ une *épicycloïde accourcie*. Trouver les équations de ces courbes, la tangente, la normale, etc.

R. Prenons pour origine le centre du cercle fixe, pour axe des x le diamètre passant par le point décrivant au moment où il est le plus près du centre fixe. Soient h la distance du point décrivant au centre mobile et t l'angle dont a tourné le rayon vecteur mené du centre fixe au point de contact. On aura

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos t - h\cos\left(\dfrac{a+b}{b}\,t\right) \\ y = (a+b)\sin t - h\sin\left(\dfrac{a+b}{b}\,t\right). \end{cases}$$

La normale passe par le point de contact des deux cercles.

5. Même problème, le roulement se faisant intérieurement. Les courbes sont alors des *hypocycloïdes*.

R. Leurs équations s'obtiennent en changeant dans les précédentes h en $-h$ et b en $-b$. On a

$$\begin{cases} x = (a-b)\cos t + h\cos\left(\dfrac{a-b}{b}\,t\right) \\ y = (a-b)\sin t - h\sin\left(\dfrac{a-b}{b}\,t\right). \end{cases}$$

6. La *cardioïde* (courbe en forme de cœur) est l'épicycloïde engendrée par le roulement de deux cercles de même rayon a. Si l'on prend pour

pôle le point décrivant au moment où il coïncide avec le point de contact. L'équation de la courbe est en coordonnées polaires

$$r = 2a\,(1 - \cos\theta).$$

Déterminer les éléments de cette courbe et sa podaire.

R. On trouve

$$\mu = \nu = \frac{\theta}{2}, \qquad S'_t = r\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}, \qquad S'_n = 2a\sin\theta,$$

$$T' = r : \sin\frac{\theta}{2}, \qquad N' = r : \cos\frac{\theta}{2}, \qquad p = r\sin\frac{\theta}{2}.$$

La podaire a pour équation

$$\rho = 4a\sin^3\tau.$$

7. Podaire d'une circonférence de rayon a par rapport à un point de la courbe.

R. La courbe est une *cardioïde* (Exercice précédent).

8. Podaires de la parabole par rapport : 1° au foyer ; 2° au sommet.

R. La première est la tangente au sommet ; la seconde une *cissoïde* (Exercice 2).

§ 2. Longueur d'un arc de courbe plane. Inclinaison de la tangente.

244. Longueur d'un arc de courbe plane. — Considérons une courbe

$$y = f(x),$$

rapportée à des axes rectangulaires. La longueur s d'un arc compris entre les points dont les coordonnées sont $x = a$, $y = f(a)$ et $x = b$, $y = f(b)$, est, par définition, la limite du périmètre d'un polygone inscrit lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment et que chacun des côtés tend vers zéro.

Nous allons montrer, en admettant que $f(x)$ a une dérivée continue $f'(x)$ que cette limite est déterminée et s'exprime par une intégrale définie.

Prenons, à cet effet, sur l'arc considéré, $n + 1$ points (y compris ses extrémités) et désignons les coordonnées de l'un quelconque d'entre eux par x_i et y_i, de sorte que, les abscisses étant numérotées par ordre de grandeur, x_1 et y_1 seront les coordonnées a et $f(a)$ de l'origine x_{n+1} et y_{n+1} les coordonnées b et $f(b)$ de l'extrémité.

Inscrivons le polygone qui a ces $(n + 1)$ points pour sommets. Le coté c_i qui joint (x_i, y_i) à (x_{i+1}, y_{i+1}) a pour mesure

$$c_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}.$$

Mais la formule des accroissements finis, donne, ξ_i étant intermédiaire entre x_i et x_{i+1},

$$y_{i+1} - y_i = f'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Il vient donc

$$c_i = (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}.$$

Lorsque les côtés du polygone tendent vers zéro, les différences $x_{i+1} - x_i$ tendent aussi vers zéro. Il vient

$$s = \lim \sum_1^n c_i = \lim \sum_1^n (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}.$$

Cette limite est, par définition (n° 206), une intégrale définie ; on a donc, en définitive,

$$s = \int_a^b dx \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

L'opération qui consiste à calculer la longueur d'un arc s'appelle *rectification*. Nous reviendrons sur ce problème dans un chapitre suivant, où nous en donnerons des exemples.

245. Dérivée et différentielle d'un arc de courbe. — Considérons maintenant, sur la courbe

$$y = f(x),$$

un arc variable s, compté depuis une origine fixe $x = a$, $y = f(a)$ jusqu'à une extrémité mobile x, y. Cet arc sera mesuré par l'intégrale

$$(1) \qquad s = \int_a^x dx \sqrt{1 + f'(x)^2} = \int_a^x dx \sqrt{1 + y'^2}.$$

Cette formule a été établie en regardant s comme une quantité essentiellement positive et nous avons implicitement supposé $x > a$ et le radical a été pris positivement. Mais, pour la généralité de la formule, il convient de considérer s comme susceptible d'un double signe, suivant le sens dans lequel on compte cet arc.

Nous conviendrons de considérer le radical comme positif dans la formule (1), de sorte que s sera positif pour $x > a$ et négatif pour $x < a$. Cela revient à regarder l'arc comme positif quand on le compte dans le sens où x varie en croissant et comme négatif dans le sens contraire. Si l'on prenait le radical négativement, la conclusion serait inverse.

Ceci posé, on tire de la formule (1)

$$(2) \qquad s' = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}, \qquad ds = dx\sqrt{1 + y'^2}.$$

En remarquant que $dy = y'dx$, la différentielle de l'arc se met sous la forme très usitée

$$(3) \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Si l'on a affaire à une représentation paramétrique de la courbe telle que $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, on aura, x' et y' étant les dérivées de x et de y par rapport à t, $dx = x'dt$, $dy = y'dt$, d'où

$$(4) \qquad ds = dt\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Nous conviendrons de prendre ce radical positivement, c'est-à-dire de considérer s comme croissant dans le même sens que t.

Enfin, on passe facilement des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires par les relations $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, d'où

$$dx = dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta, \qquad dy = dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta.$$

On trouve ainsi, r' désignant la dérivée $dr : d\theta$,

$$(5) \qquad ds = \sqrt{dr^2 + r^2d\theta^2} = d\theta\sqrt{r^2 + r'^2}.$$

$$(6) \qquad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

Nous conviendrons de prendre ce dernier radical positivement, c'est-à-dire de considérer s comme croissant dans le même sens que θ.

246. Théorème. — *Le rapport d'un arc infiniment petit à sa corde a pour limite l'unité.*

En effet, soient Δs la longueur de l'arc Δx et Δy les différences des coordonnées des extrémités. La corde c a pour mesure $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Ces quantités tendant vers zéro, on a donc

$$\lim \frac{\Delta s}{c} = \lim \frac{\dfrac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}} = \frac{s'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 1.$$

247. Inclinaison de la tangente. — Soit φ l'angle de la tangente à la courbe $y = f(x)$ avec l'axe des x. Les axes étant rectangulaires, le coefficient angulaire de la tangente est égal à $\operatorname{tg}\varphi$. Il vient donc

$$(7) \qquad \operatorname{tg}\varphi = y' = \frac{dy}{dx}.$$

On en déduit

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{s'}, \qquad \sin\varphi = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y'}{s'}.$$

Remplaçons y' et s' par $dy : dx$ et $ds : dx$; nous tirons des relations précédentes les formules très employées

(8) $$dx = ds \cos \varphi, \qquad dy = ds \sin \varphi.$$

Pour la généralité de ces formules, on doit supposer la tangente menée dans la direction où s va en croissant.

§ 3. Sens de la concavité. Points d'inflexion des courbes planes.

248. Sens de la concavité. — Soient $y = f(x)$ l'équation d'une courbe en axes rectangulaires ou obliques, et M un point de la courbe où la tangente MT n'est pas parallèle à l'axe des y (fig. 7). Si la courbe ne traverse pas sa tangente au point M, elle sera, en deçà et au delà du point M, située du même côté de la tangente MT (au moins dans le voisinage du point M). On dit que la courbe tourne, au point M, sa *concavité* du côté des y positifs ou du côté des y négatifs, suivant que la courbe se trouve par rapport à la tangente du côté des y positifs ou du côté des y négatifs.

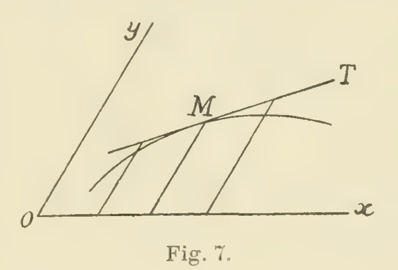


Fig. 7.

Supposons que les dérivées des deux premiers ordres $f'(x)$ et $f''(x)$ soient déterminées et continues dans le voisinage du point M; on aura le théorème suivant :

La courbe $y = f(x)$ tourne sa concavité du côté des y positifs ou du côté des y négatifs, suivant que la dérivée seconde $f''(x)$ est positive ou négative au point considéré.

En effet, l'un ou l'autre de ces deux cas se présente suivant que l'ordonnée de la courbe est plus grande que l'ordonnée de la tangente ou plus petite que cette ordonnée dans le voisinage du point M (aussi bien en deçà qu'au delà de ce point). Donnons à x un accroissement positif ou négatif $\Delta x = dx$. L'accroissement de l'ordonnée de la courbe sera Δy, l'accroissement correspondant de l'ordonnée de la tangente sera $y'dx$ ou dy, ainsi qu'il résulte de l'équation (5) de cette droite (nº 237). Le sens de la concavité dépend donc du signe de la différence

$$\Delta y - dy;$$

elle sera du côté des y positifs si cette différence est positive, du côté des y négatifs si cette différence est négative (le signe de dx devant rester arbitraire). Mais on a, par la formule de Taylor (n° 87),

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2}(d^2 y)_{x+\theta dx} = dy + \frac{1}{2} f''(x+\theta dx)\, dx^2 .$$

Si $f''(x)$ n'est pas nul, $f''(x+\theta dx)$ sera du signe de $f''(x)$, à condition que dx soit suffisamment petit; ensuite dx^2 est essentiellement positif. Donc $\Delta y - dy$ sera du même signe que $f''(x)$. La courbe sera située au dessus ou en dessous de sa tangente, de part et d'autre du point M, selon que $f''(x)$ sera >0 ou <0.

249. Points d'inflexion. — Ce sont ceux où la courbe $y = f(x)$ traverse sa tangente. Si la dérivée $f''(x)$ existe, un tel point ne peut se rencontrer, en vertu du théorème précédent, que si $f''(x) = 0$. D'où le théorème suivant :

Les abscisses des points d'inflexion sont racines de l'équation $f''(x) = 0$.

Pour trouver les points d'inflexion, il faudra donc chercher les racines de cette équation. Mais toute racine ne donne pas un point d'inflexion. Pour qu'un point M où la tangente n'est pas parallèle à l'axe des y soit un point d'inflexion, il faut que l'ordonnée de la tangente MT surpasse celle de la courbe d'un côté du point M et que l'inverse ait lieu de l'autre côté. Il faut donc que $\Delta y - dy$ change de signe avec dx.

Les dérivées première et seconde étant supposées continues, on a

$$\Delta y - dy = \frac{dx^2}{2} f''(x+\theta dx).$$

Pour que x soit l'abscisse d'un point d'inflexion, il faut que $f''(x+\theta dx)$ change de signe avec dx. De là le théorème suivant :

Les points d'inflexion de la courbe $y = f(x)$ sont ceux où $f''(x)$ change de signe.

Supposons qu'une valeur x annule $f''(x)$ et toutes les dérivées suivantes jusqu'à l'ordre n exclusivement; la formule de Taylor donnera

$$\Delta y - dy = \frac{dx^n}{n!} f^{n}(x+\theta dx).$$

La dérivée $n^{\text{ième}}$ a maintenant un signe indépendant de celui de dx supposé suffisamment petit. Les changements de signes dépendent

donc uniquement du facteur dx^n. Celui-ci ne change de signe avec dx que si n est impair. De là la règle suivante :

Pour qu'une racine de $f''(x)$ donne un point d'inflexion, il faut que la première des dérivées d'ordre supérieur au second qui ne s'annule pas en même temps que $f''(x)$, soit d'ordre impair.

Cette théorie suppose la continuité des dérivées. Il peut y avoir des points d'inflexion qui échappent à cette analyse pour les valeurs de x qui rendent discontinues les dérivées considérées.

§ 4. Courbure et développées des courbes planes.

250. Courbure. — Soit MM′ un arc de courbe tel que la direction de la tangente varie toujours dans le même sens lorsque le point de contact se déplace de M en M′. Considérons les deux tangentes MT et M′T′ menées à ses deux extrémités dans le même sens. On appelle *courbure de l'arc* l'angle des deux tangentes extrêmes ; *courbure moyenne* le rapport de cet angle à la longueur de l'arc ; *courbure au point* M la limite vers laquelle tend la courbure moyenne quand le point M′ se rapproche indéfiniment du point M.

Désignons par Δs et $\Delta\varphi$ les accroissements de la longueur de l'arc et de l'inclinaison de la tangente quand on passe du point M au point M′. La courbure de l'arc MM′ sera $\Delta\varphi$, sa courbure moyenne $\Delta\varphi : \Delta s$ et sa courbure au point M

$$\lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Nous remarquerons, pour commencer, le théorème suivant :

Dans un cercle de rayon R, *la courbure est la même en chaque point et égale à* 1 : R.

En effet, l'angle au centre correspondant à l'arc MM′ est le même angle $\Delta\varphi$ que celui des tangentes extrêmes ; donc la longueur Δs de l'arc MM′ est R $\Delta\varphi$. La courbure moyenne est par conséquent égale à 1 : R, quel que soit l'arc MM′. Passant à la limite, on voit que la courbure sera aussi égale à 1 : R en chaque point.

251. Rayon de courbure. — Le courbure étant uniforme dans le cercle, il est naturel de comparer les autres courbes à un cercle sous le rapport de la courbure. On appelle *rayon de courbure* d'une courbe au point M, le rayon du cercle qui a même courbure que la courbe

en ce point. Comme, dans le cercle, le rayon est l'inverse de la courbure, on a le théorème suivant :

Le rayon de courbure d'une courbe quelconque au point M *est égale à l'inverse de la courbure en ce point.*

Le rayon de courbure se désigne par R, on aura donc l'équation

$$(1) \qquad R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{s'}{\varphi'}.$$

Supposons que la courbe ait pour équation

$$y = f(x)$$

et considérons y comme fonction de x. On a (nº 247) $\varphi = \text{arc tg } y'$, d'où, en dérivant,

$$(2) \qquad \varphi' = \frac{y''}{1 + y'^2}.$$

D'autre part, on sait (nº 245) que

$$(3) \qquad s' = \sqrt{1 + y'^2}$$

Substituant ces valeurs, il vient

$$(4) \qquad R = \frac{s'}{\varphi'} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

Cette formule comporte l'extraction d'une racine carrée. On convient de considérer R comme essentiellement positif; on choisira donc en conséquence le signe du radical.

On remarquera qu'en un point d'inflexion où y'' est nul, le rayon de courbure devient infini.

252. Cercle osculateur ou de courbure. — *Le cercle osculateur en un point* M *d'une courbe plane est la limite d'un cercle passant par le point* M *et deux autres points* M' *et* M'' *qui se rapprochent indéfiniment du premier.*

Supposons que la courbe ait pour équation

$$y = f(x).$$

Soient x, x_1 et x_2 les abscisses des points M, M', M'', α et β les coordonnées du centre et R le rayon du cercle qui passe par ces trois points. Posons, y désignant la fonction $f(x)$ et α, β et R des constantes,

$$(5) \qquad F(x) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2.$$

Les équations qui expriment que les trois points M, M' et M'' sont sur le cercle sont :

$$F(x) = 0, \qquad F(x_1) = 0, \qquad F(x_2) = 0.$$

Mais alors, en vertu du théorème de Rolle, $F'(x)$ a une racine ξ entre x et x_1 et une autre racine ξ' entre x_1 et x_2. Pour la même raison, $F''(x)$ a une racine ξ_1 entre ξ et ξ'. Les éléments α, β et R du cercle passant par M, M′ et M″ vérifient donc les trois équations :

$$F(x) = 0, \qquad F'(\xi) = 0, \qquad F''(\xi_1) = 0.$$

Passons à la limite. Quand x_1 et x_2 tendent vers x, il en est de même de ξ et ξ_1. Les éléments α, β et R du cercle osculateur seront donc déterminés par les trois équations :

$$(6^a) \qquad F(x) = 0, \qquad F'(x) = 0, \qquad F''(x) = 0.$$

En les développant, il vient

$$(6^b) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2, \\ (x-\alpha) + (y-\beta)\,y' = 0, \\ 1 + y'^2 + (y-\beta)\,y'' = 0. \end{array} \right.$$

Ces équations fournissent des valeurs déterminées pour les éléments du cercle osculateur, pourvu que y'' ne soit pas nul. Les deux dernières déterminent les coordonnées α et β du centre, car on en tire

$$(7) \qquad \beta - y = \frac{1+y'^2}{y''}, \qquad \alpha - x = -\frac{y'(1+y'^2)}{y''}.$$

Portant ensuite ces valeurs dans la première équation, il vient

$$(8) \qquad R = \pm \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

Cette formule est la même que (**4**). Donc *le rayon du cercle osculateur est égal au rayon de courbure.* C'est pourquoi le cercle osculateur s'appelle aussi *cercle de courbure* et son centre, *centre de courbure.*

Les formules (**7**) peuvent s'écrire sous une forme plus condensée, si l'on tient compte de l'équation (**2**). On a

$$(9) \qquad \beta - y = \frac{1}{\varphi'} = \frac{dx}{d\varphi}, \qquad \alpha - x = -\frac{y'}{\varphi'} = -\frac{dy}{d\varphi}.$$

Ces formules sont analogues à $R = \frac{ds}{d\varphi}$, mais elles ont lieu sans ambiguité de signe.

253. Théorème. — *Le centre de courbure Z relatif au point* M *se trouve sur la normale au point* M *à l'intersection de celle-ci avec une normale infiniment voisine.*

En effet, x et y étant les coordonnées de M, la seconde des équations (**6**), savoir

$$F'(x) = (x-\alpha) + (y-\beta)\,y' = 0$$

exprime que le point Z de coordonnées (α, β) est sur la normale au point M. De même, x_1 étant l'abscisse du point M', l'équation $F'(x_1) = 0$ exprimera que le point Z est sur la normale au point M'. Mais alors, suivant le théorème de Rolle, $F''(x)$ s'annule en un point ξ intermédiaire entre x et x_1. Les coordonnées α, β de l'intersection des normales en M et M' vérifient donc les deux équations :

$$F'(x) = 0, \qquad F''(\xi) = 0.$$

Faisons tendre M' vers M, ξ tend vers x, et, à la limite, les deux équations précédentes reproduisent les deux dernières équations (**6**) qui déterminent les coordonnées du centre de courbure.

254. Position du rayon de courbure. — Le rayon de courbure a été considéré jusqu'ici en grandeur seulement. Il est souvent commode de le définir *en grandeur et en position*. On appelle alors *rayon de courbure* le segment MZ mené du point M au centre de courbure correspondant. Le rayon de courbure est donc dirigé suivant la normale au point M du côté où la courbe tourne sa concavité.

255. Relation entre le rayon de courbure et la normale. — La longueur de la normale, considérée au n° 239, a pour expression $\pm y\sqrt{1+y'^2}$. Il en résulte que l'on a, au signe près :

$$(10) \qquad \frac{R}{N} = -\frac{1+y'^2}{yy''}.$$

Précédemment N a été considéré comme essentiellement positif ainsi que R. Mais nous allons faire en sorte que l'équation (**10**) subsiste même en signe. Il faut pour cela donner un signe à N, savoir le signe + si N est du même côté de la courbe que R et le signe — s'il est du côté opposé.

En effet, le second membre de l'équation (**10**) a le signe de $-yy''$. Il sera positif si y et y'' sont de signes contraires, alors, la courbe tournant sa concavité vers l'axe OX (n° 248), R et N sont du même côté de la courbe. L'inverse aurait lieu dans le cas contraire.

256. Développée et développante. — Si le point M se déplace sur la courbe, le centre de courbure correspondant Z se déplace en même temps. Le lieu géométrique du centre de courbure se nomme *développée*. Par opposition, la courbe génératrice se nomme *développante*.

On obtient immédiatement une *représentation paramétrique* de la développée. Elle est fournie par les équations (**7**), qui donnent

$$(11) \qquad \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \qquad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

développée = evolute

et qui expriment les coordonnées d'un point α, β de la développée en fonction du paramètre x. En éliminant x entre ces deux équations, on mettra l'équation de la développée sous la forme F $(\alpha, \beta) = 0$. Mais il est souvent tout aussi avantageux d'envisager la développée sous la forme (**11**).

La développée jouit de propriétés remarquables, que nous allons démontrer :

I. *Le rayon de courbure en* M *touche la développée au centre de courbure* Z *correspondant.*

Considérant y, α et β comme fonctions de x, on a (**6**[b])

(**12**) $$(x-\alpha)+(y-\beta)\,y'=0.$$

Dérivons totalement cette équation. La somme des termes provenant de la variation des lettres x et y est nulle en vertu de la troisième équation (**6**) ; il reste donc

(**13**) $$-\alpha'-\beta' y'=0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\beta'}{\alpha'}=-\frac{1}{y'}.$$

Donc la tangente en Z à la développée, qui a pour coefficient angulaire $\beta' : \alpha'$, est parallèle à la normale en M à la développante (donc au rayon de courbure), qui a pour coefficient angulaire $-1 : y'$. Par suite, ces droites, ayant le point Z commun, coïncident.

II. *L'arc de la développée est égal à la différence de longueur des rayons de courbure tangents à ses extrémités.*

Considérant y, α, β et R comme fonctions de x, on a (**6**[b])

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2.$$

Si l'on dérive totalement cette équation, la somme des termes provenant de la variation des lettres x et y est nulle en vertu de la seconde équation (**6**) ; il reste donc

$$(x-\alpha)\,\alpha'+(y-\beta)\,\beta'=-RR'.$$

D'autre part, en éliminant y' entre (**12**) et (**13**), puis en appliquant les propriétés des fractions égales, il vient

$$\frac{x-\alpha}{\alpha'}=\frac{y-\beta}{\beta'}=\frac{(x-\alpha)\,\alpha'+(y-\beta)\,\beta'}{\alpha'^2+\beta'^2}=\pm\frac{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}.$$

La dernière égalité se simplifie en ayant égard aux précédentes et en observant que $\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}$ est la dérivée de l'arc de la développée. Si l'on désigne cet arc par σ, il vient

$$-\frac{RR'}{\sigma'^2}=\pm\frac{R}{\sigma'}, \qquad \text{d'où} \qquad R'=\pm\sigma'.$$

Le signe à choisir dépend du sens dans lequel on compte l'arc σ. Comptons-le dans le sens où R croît, ce qui suppose que R varie constamment dans le même sens dans l'intervalle considéré des valeurs de x, nous aurons $R' = \sigma'$. Donc R et σ, ayant même dérivée, ne diffèrent que par une constante dans cet intervalle.

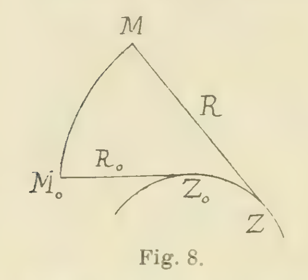


Fig. 8.

Considérons (fig. 8) un arc M_0M de la développante compté depuis un point fixe M_0 d'abscisse x_0 jusqu'à un point variable M d'abscisse x. Supposons que le rayon de courbure varie constamment en croissant quand on se déplace sur la courbe de M_0 vers M. Soit Z_0Z l'arc correspondant de la développée, de sorte que M_0Z_0 et MZ sont les rayons de courbures R_0 et R des points M_0 et M. Désignons par σ l'arc Z_0Z. On aura

$$R = \sigma + C.$$

Pour $x = x_0$, cette relation donne $R_0 = C$, nous obtenons donc la relation à démontrer :

(14) $$\sigma = R - R_0.$$

Nous avons supposé dans cette démonstration que la variation de R était toujours de même sens ; le théorème tomberait en défaut si R passait par un maximum ou un minimum.

257. Description de la développante d'un mouvement continu. Sa détermination analytique. — Les théorèmes précédents fournissent un moyen de décrire la développante d'un mouvement continu quand on connaît la développée. Concevons un fil parfaitement flexible, inextensible et sans épaisseur, enroulé sur la développée et s'en détachant tangentiellement en Z_0 pour venir aboutir en M_0 où on le coupe (fig. 8). Imaginons qu'on déroule le fil en le détachant tangentiellement de la développée et en le maintenant toujours tendu ; l'extrémité libre du fil décrira la développante. En effet, quand le fil se détachera en Z, il prendra la direction ZM, et comme le brin détaché s'est accru de l'arc Z_0Z, sa longueur sera R. Son extrémité sera donc en M. Comme la longueur Z_0M_0 du brin initial est arbitraire, à une même développée correspondent une infinité de développantes.

Au point de vue analytique, la détermination des développantes quand la développée est donnée, se ramène à la *rectification de l'arc de la développée*, c'est-à-dire à une quadrature.

En effet, supposons que l'équation de la développée soit ramenée à la forme

(15) $$\beta = \varphi(\alpha).$$

Prenons α comme variable indépendante. Désignons par β' la dérivée de β par rapport à α. L'arc σ compté à partir du point Z_0 (fig. 8) dans le sens où α augmente, se détermine par la formule (n° 245)

$$\sigma = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha\sqrt{1+\beta'^2}$$

Cette quadrature effectuée, le problème sera résolu. En effet, soit λ l'inclinaison sur l'axe des abscisses de la tangente ZM à la développée; les coordonnées du point M de la développante sont :

$$x = \alpha + \mathrm{R}\cos\lambda, \qquad y = \beta + \mathrm{R}\sin\lambda.$$

On a $\operatorname{tg}\lambda = \beta'$. On en déduit, ZM faisant un angle obtus avec l'axe des abscisses (fig. 8),

$$\cos\lambda = -\frac{1}{\sqrt{1+\beta'^2}}, \qquad \sin\lambda = -\frac{\beta'}{\sqrt{1+\beta'^2}}.$$

Comme $\mathrm{R} = \sigma + \mathrm{C}$, il vient donc

(16) $$x = \alpha - \frac{\sigma + \mathrm{C}}{\sqrt{1+\beta'^2}}, \qquad y = \beta - \frac{\beta'(\sigma + \mathrm{C})}{\sqrt{1+\beta'^2}}.$$

Les seconds membres étant fonctions de α, les équations (**16**) fournissent une *représentation paramétrique* de la développante.

Si la tangente ZM était dirigée en sens opposé, $\cos\lambda$ et $\sin\lambda$ changeraient de signe, mais les équations précédentes n'en seraient pas altérées, car, R variant alors en sens inverse de σ, on aurait $\mathrm{R} = -(\sigma + \mathrm{C})$.

Les équations (**16**) renferment une constante arbitraire C, ce qui doit être, puisqu'il existe une infinité de développantes.

258. Adaptation des formules au cas d'une représentation paramétrique. — Si x et y sont des fonctions de t, ayant pour dérivées x' et y', les dérivées premières et secondes de y par rapport à x ont pour expressions (n° 152)

$$\mathrm{D}_x y = \frac{y'}{x'}, \qquad \mathrm{D}_x^2 y = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^3}.$$

On doit donc substituer ces valeurs à y' et à y'' dans les formules précédemment trouvées.

L'expression du rayon de courbure se déduit de la formule (**4**), la transformation donne

$$(\mathbf{17}) \qquad R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}.$$

Les coordonnées α et β du centre de courbure seront déterminées par les équations suivantes, déduites des équations (**7**) :

$$(\mathbf{18}) \qquad \alpha = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \qquad \beta = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}.$$

Enfin la relation (**10**) entre R et N deviendra

$$(\mathbf{19}) \qquad \frac{R}{N} = -\frac{x'(x'^2 + y'^2)}{y(x'y'' - x''y')}.$$

259. Applications diverses. — I. *Coniques en général.* Prenons un axe de la courbe comme axe des x, l'équation d'une conique en coordonnées rectangulaires sera de la forme

$$y^2 = \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma.$$

On en tire

$$y' = \frac{\alpha x + \beta}{y}, \qquad y'' = \frac{\alpha y - (\alpha x + \beta) y'}{y^2} = \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{y^3}.$$

Substituons ces valeurs dans la relation (**10**), il vient

$$\frac{R}{N} = -\frac{1 + y'^2}{yy''} = -\frac{y^2(1 + y'^2)}{\alpha\gamma - \beta^2} = \frac{N^2}{\beta^2 - \alpha\gamma},$$

d'où

$$R = \frac{N^3}{\beta^2 - \alpha\gamma}.$$

Donc *le rayon de courbure d'une conique est proportionnel au cube de la normale limitée à un axe de la courbe.*

Si l'on prend pour origine un foyer et l'axe focal pour axe des x, l'équation prend la forme

$$x^2 + y^2 = (ex + p)^2.$$

En identifiant cette équation avec la précédente, on a

$$\alpha = e^2 - 1, \qquad \beta = ep, \qquad \gamma = p^2,$$

d'où $\beta^2 - \alpha\gamma = p^2$ et

$$R = \frac{N^3}{p^2}.$$

Donc *le rayon de courbure d'une conique est égal au cube de la normale divisé par le carré du demi-paramètre (ordonnée au foyer).*

II. *Parabole.* Prenons l'axe de symétrie comme axe des y et la directrice comme axe des x. Les points de la parabole sont à égale distance du foyer et de la directrice ; l'équation de cette courbe sera

$$x^2 + (y - p)^2 = y^2,$$

d'où

$$y = \frac{x^2 + p^2}{2p}, \qquad y' = \frac{x}{p}, \qquad y'' = \frac{1}{p}.$$

On aura donc

$$\frac{R}{N} = - \frac{1 + y'^2}{yy''} = - 2.$$

Donc *le rayon de courbure de la parabole est double de la normale limitée à la directrice et il est dirigé en sens contraire*, ce qui fournit une construction facile de ce rayon.

Les coordonnées du centre de courbure sont données par les équations (**11**) qui se simplifient grâce à la dernière équation ci-dessus. Il vient

$$\alpha = x - 2yy' = - \frac{x^3}{p^2}$$

$$\beta = y + 2y = 3y.$$

Substituant les valeurs de y et de x tirées de ces relations dans l'équation de la parabole, on trouve celle de la développée

$$p\alpha^2 = \left(\frac{2\beta}{3} - p\right)^3.$$

III. *Ellipse.* Considérons la représentation paramétrique

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t.$$

On en déduit

$$x' = - a \sin t, \qquad x'' = - a \cos t, \qquad y' = b \cos t, \qquad y'' = - b \sin t,$$

d'où $x'y'' - y'x'' = ab$. Il vient donc (n° 258)

$$s' = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

$$R^2 = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^3}{(ab)^2}.$$

Les coordonnées du centre de courbure sont :

$$\begin{cases} \alpha = a \cos t - \dfrac{b \cos t\,(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)}{ab} = \dfrac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t \\ \beta = b \sin t - \dfrac{a \sin t\,(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)}{ab} = - \dfrac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t. \end{cases}$$

Ces formules fournissent une représentation paramétrique de la développée. Si on élimine t, l'équation de cette courbe prend la forme

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

IV. *Cycloïde.* Considérons la représentation paramétrique de cette courbe (n° **240**)

$$x = a\,(t - \sin t), \qquad y = a\,(1 - \cos t).$$

On en tire

$$x' = y = a\,(1 - \cos t), \qquad x'' = y' = a \sin t, \qquad y'' = a \cos t\,;$$

par suite,

$$x'^2 + y'^2 = 2a^2\,(1 - \cos t), \qquad x'y'' - x''y' = -\,a^2\,(1 - \cos t).$$

Il vient ainsi

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{N}} = -\,\frac{x'\,(x'^2 + y'^2)}{y\,(x'y'' - x''y')} = -\,\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} = 2.$$

Donc, *dans la cycloïde, le rayon de courbure est double de la normale et il est dirigé dans le même sens.*

Les coordonnées du centre de courbure sont fournies par les équations (**18**) qui donnent, à cause de la dernière égalité écrite ci-dessus

$$\alpha = x + 2y' = a\,(t + \sin t)$$
$$\beta = y + 2x' = -\,a\,(1 - \cos t).$$

Mais, en posant $t = \pi + t_1$, ces équations deviennent

$$\alpha = a\pi + a\,(t_1 - \sin t_1),$$
$$\beta = -\,2a + a\,(1 - \cos t_1).$$

Donc la développée est une cycloïde égale à la première mais déplacée de $a\pi$ dans le sens des x positifs et de $2a$ dans celui des y négatifs.

V. *Chaînette.* Cette courbe a pour équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

L'axe des x est sa *base*, la longueur a son paramètre. On trouve

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \qquad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2}.$$

d'où $1 + y'^2 = y^2 : a^2$. On en conclut d'abord

$$\mathrm{R} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{y^2}{a}.$$

Donc *le rayon de courbure de la chaînette est proportionnel au carré de l'ordonnée.*

D'autre part, il vient par la formule (**10**)

$$\frac{R}{N} = -\frac{1+y'^2}{yy''} = -1.$$

Donc, *dans la chaînette, le rayon de courbure est égal à la normale limitée à la base, mais il est dirigé en sens contraire.*

260. Coordonnées polaires. — Soit φ l'inclinaison de la tangente sur l'axe polaire, α celle de la normale. Comme ces deux angles varient de la même quantité, on a $\varphi' = \alpha'$ et il vient

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{s'}{\varphi'} = \frac{s'}{\alpha'}.$$

Mais on a (nos 245 et 242)

$$s' = \sqrt{r^2 + r'^2}, \qquad \alpha = \theta - \operatorname{arc\,tg} \frac{r'}{r};$$

d'où, en dérivant par rapport à θ,

$$(20) \qquad \varphi' = \alpha' = 1 - \frac{rr'' - r'^2}{r^2 + r'^2} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}.$$

Remplaçant s' et α' par ces valeurs, on trouve

$$(21) \qquad R = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Les coordonnées cartésiennes α et β du centre de courbure s'obtiennent au moyen des relations (**9**), d'où l'on déduit

$$(22) \qquad \begin{cases} \alpha = x - \dfrac{dy}{d\varphi} = r\cos\theta - \dfrac{(r\sin\theta)'}{\varphi'}, \\[2ex] \beta = y + \dfrac{dx}{d\varphi} = r\sin\theta + \dfrac{(r\cos\theta)'}{\varphi'}, \end{cases}$$

On aura soin de ne pas confondre α coordonnée du centre de courbure avec α inclinaison de la normale.

Appliquons ces formules à quelques exemples :

I. *Spirale logarithmique* : $r = ae^{m\theta}$. — Dans ce cas, l'angle μ est constant ; α étant l'inclinaison de la normale, on a $\alpha = \theta - \mu$ et on conclut $\alpha' = 1$. Il vient donc

$$R = s' = \sqrt{r^2 + r'^2} = r\sqrt{1 + m^2}$$

Donc *le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur.*

D'autre part, si l'on se reporte à la valeur de la normale polaire N', on voit que R = N'. Donc le rayon de courbure est égal à la normale

polaire. Le centre de courbure est au point N (fig. 6). Si ρ et τ sont les coordonnées du centre de courbure, on aura

$$\rho = \text{N}' = mr, \qquad \tau = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

En éliminant r et θ entre ces équations et celle de la courbe, on trouve l'équation de la développée

$$\rho = ma\, e^{m\left(\tau - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Cette développée est une spirale égale à la première, car, en faisant tourner l'axe polaire autour du pôle, de manière à augmenter l'argument d'une quantité ω définie par l'équation

$$ma\, e^{m\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)} = 1,$$

on retrouvera l'équation de la première spirale.

II. *Lemniscate de Bernouilli* : $r^2 = a^2 \cos 2\theta$. — On tire de cette équation

$$rr' = -a^2 \sin 2\theta, \qquad r' : r = -\operatorname{tg} 2\theta.$$

On en conclut d'abord, α étant l'inclinaison de la normale,

$$\alpha = \theta - \operatorname{arc\,tg} \frac{r'}{r} = 3\theta.$$

Donc, *dans la lemniscate, l'inclinaison de la normale est triple de celle du rayon vecteur*. On a donc aussi

$$\varphi' = \alpha' = 3.$$

D'autre part, N′ étant la normale polaire, on a

$$s' = \text{N}' = \sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{r}{\cos 2\theta} = \frac{a^2}{r}.$$

De là résulte la valeur de R :

$$\text{R} = \frac{s'}{\varphi'} = \frac{\text{N}'}{3} = \frac{a^2}{3r}.$$

Donc *le rayon de courbure de la lemniscate varie en raison inverse du rayon vecteur et il est le tiers de la normale polaire*, ce qui permet de le construire facilement.

Soient maintenant α, β les coordonnées du centre de courbure. Faisant $\varphi' = 3$ dans les formules (**22**), il vient, réductions faites,

$$\alpha = \frac{1}{3r}(rr^2 \cos\theta - rr' \sin\theta), \qquad \beta = \frac{1}{3r}(rr^2 \sin\theta - rr' \cos\theta).$$

Enfin, en remplaçant r^2 et rr' par leurs valeurs $a^2 \cos 2\theta$ et $-a^2 \sin 2\theta$, on trouve, après quelques simplifications,

$$\alpha = \frac{2a^2}{3r} \cos^3\theta, \qquad \beta = -\frac{2a^2}{3r} \sin^3\theta.$$

L'équation de la développée s'obtient en éliminant r et θ. On a

$$\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{a^{\frac{4}{3}}}{r^{\frac{2}{3}}}, \qquad \alpha^{\frac{2}{3}} - \beta^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{r^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}},$$

d'où

$$\left(\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}} - \beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2a}{3}.$$

Exercices.

1. Rayon de courbure de la *cissoïde* (Exercice 2, p. 236).

R. La courbe a pour équation $y^2 = x^3 : (2a - x)$. On en tire

$$R^2 = \frac{a^2 x (8a - 3x)^3}{3^2 (2a - x)^4}.$$

2. Rayon de courbure de la courbe $\dfrac{x^m}{a^m} + \dfrac{y^m}{b^m} = 1$.

$$R = \frac{1}{m-1} \frac{(ab)^m}{(xy)^{m-2}} \left(\frac{x^{2m-2}}{a^{2m}} + \frac{y^{2m-2}}{b^{2m}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

3. Rayon de courbure et développée de l'*astroïde* (hypocycloïde engendrée par un point d'un cercle roulant intérieurement sur un cercle de rayon quadruple a).

R. Les équations de la courbe s'obtiennent en posant $b = h = a : 4$ dans celles données à la page 237 (Exercice 5). Il vient

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a}{4}(3\cos t + \cos 3t) = a\cos^3 t, \\ y &= \frac{a}{4}(3\sin t - \sin 3t) = a\sin^3 t. \end{aligned}\right. \qquad \text{d'où} \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

On en déduit

$$R = 3(axy)^{\frac{1}{3}}, \qquad \alpha = x + 3(xy^2)^{\frac{1}{3}}, \qquad \beta = y + 3(x^2 y)^{\frac{1}{3}},$$

$$(\alpha + \beta)^{\frac{2}{3}} + (\alpha - \beta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}.$$

En faisant tourner les axes de 45° autour de l'origine, on voit que la développée est une nouvelle *astroïde*, engendrée par des cercles de rayons doubles des précédents.

4. Rayon de courbure et développée de l'*épicycloïde*.

R. En posant en abrégé $(a + b) : b = m$, les équations de cette courbe sont (Exercice 4, p. 237) :

$$x = b\,(m\cos t - \cos mt), \qquad y = b\,(m\sin t - \sin mt)$$

Prenant t comme variable indépendante, on trouve

$$s' = 2mb \sin \frac{m-1}{2} t, \qquad x'y'' - y'x'' = 2(m+1)(mb)^2 \sin^2 \frac{m-1}{2} t.$$

On en conclut

$$\varphi' = \frac{m+1}{2}, \qquad R = \frac{s'}{\varphi'} = \frac{4mb}{m+1} \sin \frac{m-1}{2} t.$$

Les équations de la développée seront :

$$\alpha = x - \frac{y'}{\varphi'} = \frac{m-1}{m+1} b (m \cos t + \cos mt)$$

$$\beta = y + \frac{x'}{\varphi'} = \frac{m-1}{m+1} b (m \sin t + \sin mt)$$

La développée est une autre épicycloïde. Pour ramener ses équations à la forme normale, comme les équations de l'épicycloïde proposée, il suffit de faire tourner les axes coordonnés d'un angle $\omega = \pi : (m-1)$ et de changer t en $t + \omega$.

5. Rayon de courbure et développée de l'*hypocycloïde*.

R. En posant en abrégé $(a - b) : b = m$, les équations de la courbe sont (Exercice 5, p. 237)

$$x = b\,(m \cos t + \cos mt), \qquad y = b\,(m \sin t - \sin mt).$$

Ces équations s'obtiennent en changeant les signes de b et de m dans celles de l'épicycloïde. La solution est donc comprise dans la précédente. La développée sera une autre épicycloïde.

6. Soient r le rayon vecteur d'un point d'une courbe, p la perpendiculaire abaissée du pôle sur la tangente. Montrer que le rayon de courbure a pour expression

$$R = \frac{rdr}{dp} = \frac{rr'}{p'}$$

R. Ce résultat s'obtient directement en dérivant la valeur de p (n° 242) et en la comparant à celle de R (n° 260).

7. Rayon de courbure de la courbe : $r^n = a^n \cos n\theta$.

R. C'est une généralisation des résultats obtenus au n° 260 (II) pour la lemniscate. On trouve (α étant l'inclinaison de la normale

$$\alpha = (n+1)\theta, \qquad R = \frac{N'}{n+1} = \frac{1}{n+1} \frac{a^n}{r^{n-1}}.$$

8. Rayon de courbure de la podaire d'une courbe donnée.

R. Soient, pour la courbe donnée, r le rayon vecteur, θ l'angle polaire, α l'inclinaison de la normale, s l'arc, R le rayon de courbure. Affectons de l'indice 1 les quantités analogues pour la podaire. On trouve d'abord

$$\alpha_1 = 2\alpha - \theta, \qquad ds_1 = r d\alpha.$$

Il vient alors facilement

$$\frac{1}{R_1}=\frac{d\alpha_1}{ds_1}=\frac{2}{r}-\frac{d\theta}{rd\alpha}=\frac{2}{r}-\frac{R}{r}\,\frac{d\theta}{ds}=\frac{2}{r}-\frac{Rr_1}{r^3}.$$

9. Rayon de courbure de la développée d'une courbe donnée.

R. Conservons les notations habituelles pour la courbe donnée et soit R_1 le rayon de courbure de la développée. On a

$$R_1=\frac{d\sigma}{d\varphi}=\frac{dR}{d\varphi}=R\frac{dR}{ds}$$

Prenant x comme variable indépendante, il vient donc

$$\frac{R_1}{R}=\frac{1}{s'}\left[(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}:y''\right]'=3y'-\frac{(1+y'^2)\,y'''}{y''^2}.$$

CHAPITRE VIII

Formules fondamentales de la théorie des surfaces et des courbes gauches.

§ 1. Tangente à une courbe. Longueur d'un arc. Plan tangent à une surface.

261. Représentation analytique d'une surface. — On peut d'abord considérer une surface comme le lieu des points du plan dont les coordonnées cartésiennes x, y et z sont liées par une équation

$$F(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Nous appellerons *point ordinaire* de la surface, tout point où la fonction F est continue ainsi que ses dérivées partielles de tous les ordres et où l'une au moins des trois dérivées partielles F'_x, F'_y ou F'_z est différente de zéro. Les autres points sont des *points singuliers*.

Dans le voisinage d'un point ordinaire où F'_z n'est pas nul, l'équation (1) définit une fonction implicite z des deux variables indépendantes x et y (n° 143) [1] et, par conséquent, elle peut se ramener, au moins implicitement, à la forme

$$z = f(x, y), \tag{2}$$

la fonction f ayant des dérivées partielles finies et déterminées, qui se calculent au moyen des règles de dérivation des fonctions implicites.

Si F'_z s'annulait en un point ordinaire, une des deux autres dérivées F'_x ou F'_y ne serait pas nulle et la résolution de l'équation (1) pourrait se faire par rapport à x ou par rapport à y.

On raisonne souvent sur l'équation de la surface mise sous la forme (2), mais les formules s'étendent aux équations de la forme (1) en vertu des règles de dérivation des fonctions implicites. Il faut seulement considérer les points ordinaires de la surface.

On peut aussi définir une surface au moyen d'une *représentation paramétrique*. On exprime alors les coordonnées x, y, z de ses points

[1] On peut faire, à propos de ce théorème, une remarque analogue à celle de la page 226.

en fonction de deux paramètres indépendants u et v. La surface est alors représentée au moyen de trois équations :

$$(3) \qquad x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v).$$

Quand nous emploierons cette représentation, nous supposerons les trois fonctions f continues ainsi que leurs dérivées, sauf pour certains systèmes exceptionnels de valeurs de u, v.

Nous appellerons *points ordinaires* de la surface ceux où ces trois fonctions sont continues ainsi que leurs dérivées et où, de plus, l'un au moins des trois déterminants :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro,

Dans le voisinage d'un point ordinaire ainsi défini, on peut encore considérer une des trois coordonnées x, y, z comme fonction des deux autres. En effet, si le premier de ces déterminants est différent de zéro, on peut démontrer (n° 144) que les deux premières équations (**3**) définissent u et v en fonction de x, y et, en portant ces valeurs dans la troisième équation, on obtiendra z en fonction de x et y, c'est-à-dire que l'équation de la surface pourra se mettre sous la forme (**2**).

Donc, dans les démonstrations, on pourra supposer à son gré que la surface soit définie par une équation de la forme (**2**) ou par un système de la forme (**3**). Les démonstrations seront générales à condition de se borner aux points ordinaires de la surface.

262. Représentation analytique d'une courbe de l'espace. — En premier lieu, on peut définir une courbe de l'espace comme l'intersection de deux surfaces différentes, ou comme le lieu des points dont les coordonnées vérifient deux équations :

$$(4) \qquad F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0.$$

Les *points ordinaires* de la courbe sont ceux où les deux fonctions F_1 et F_2 sont continues ainsi que leurs dérivées partielles et où l'un au moins des trois déterminants :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

Supposons que le premier de ces déterminants ne soit pas nul en un point. On peut démontrer (nº 144) que les équations (4) définissent deux fonctions implicites y et z de x et que, par conséquent, elles peuvent, au moins implicitement, se ramener à la forme

$$(5) \qquad y = \varphi(x), \qquad z = \psi(x),$$

ces deux fonctions ayant des dérivées finies et déterminées, qui se calculent par les règles de dérivation des fonctions implicites.

Les résultats que nous établirons en raisonnant sur les équations de la forme (5) pourront donc s'étendre aux équations de la forme (4) à condition de se limiter aux points ordinaires de la courbe.

On peut, en second lieu, considérer une courbe comme le lieu des positions successives d'un point mobile, ce qui conduit à exprimer x, y, z en fonction d'une variable indépendante t. On obtient ainsi une *représentation paramétrique* de la courbe au moyen de trois équations :

$$(6) \qquad x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t).$$

On appelle alors *points ordinaires* de la courbe, ceux où les trois fonctions φ sont continues ainsi que toutes leurs dérivées et où l'une au moins des trois dérivées premières φ_1', φ_2' ou φ_3' est différente de zéro.

Dans le voisinage d'un point ordinaire, le système (6) peut aussi se transformer dans un système analogue à (5). En effet, si $\varphi_1'(t)$ n'est pas nul, la première équation (6) définit t en fonction de x (nº 142), et en portant cette valeur dans les deux équations suivantes, on obtient y et z en fonction de x.

Donc, dans les démonstrations, on pourra choisir le mode de représentation que l'on voudra. Les conclusions seront générales à condition de se borner aux points ordinaires de la courbe.

C'est le mode de représentation paramétrique qui est le plus employé, parce qu'il a l'avantage de rendre les formules plus symétriques. Les formules ainsi établies renferment comme cas particulier celles relatives au premier mode de représentation, car les équations (6) se réduisent à la forme (5) en posant $t = x$.

Lorsque tous les points d'une courbe sont dans un même plan, la courbe est *plane*, elle est *gauche* dans le cas contraire.

263. Tangente et plan normal à une courbe. — Supposons que la

courbe, rapportée à des axes rectangulaires ou obliques, ait pour représentation paramétrique

(7) $$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t).$$

La tangente en un point M de coordonnées x, y, z est la limite d'une sécante passant par ce point et par un autre point M′ qui se rapproche indéfiniment du premier. Soient Δt l'accroissement qu'il faut donner au paramètre pour passer de M à M′, Δx, Δy, Δz les accroissements correspondants des coordonnées. Les équations de la sécante MM′ peuvent s'écrire (ξ, η, ζ désignant les coordonnées courantes)

(8) $$\frac{\xi - x}{\Delta x} = \frac{\eta - y}{\Delta y} = \frac{\zeta - z}{\Delta z}.$$

Divisons les dénominateurs par Δt et faisons tendre Δt vers 0. Les quotients $\Delta x : \Delta t$, $\Delta y : \Delta t$, $\Delta z : \Delta t$ tendent vers les dérivées x', y', z', supposées existantes, de x, y, z par rapport à t. On trouve ainsi les équations de la tangente au point M, savoir

(9) $$\frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'}.$$

Ces équations supposent toutefois que x', y', z' ne s'annulent pas simultanément au point M et c'est ce qui a lieu en tout point ordinaire de la courbe.

Multiplions par dt les trois dénominateurs des équations (9) ; les équations de la tangente prendront la forme suivante :

(10) $$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}.$$

Ces équations ont l'avantage d'être indépendantes du mode de représentation adopté pour la courbe.

Le *plan normal* en un point d'une courbe est le plan mené par ce point perpendiculairement à la tangente. Nous supposerons les axes rectangulaires. L'équation du plan normal se déduit immédiatement des équations (9). Les coefficients de direction de la tangente sont les coefficients de l'équation du plan normal ; cette équation sera donc

(11) $$(\xi - x)\, x' + (\eta - y)\, y' + (\zeta - z)\, z' = 0.$$

Si l'on multiplie cette équation par dt, elle prend la forme

(12) $$(\xi - x)\, dx + (\eta - y)\, dy + (\zeta - z)\, dz = 0.$$

264. Définition de la longueur d'un arc de courbe. Différentielle de l'arc. — La longueur d'un arc de courbe AB se définit comme dans le

cas des courbes planes (n° **244**). C'est la limite, quand elle existe, du périmètre d'un polygone inscrit lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment et que chacun des côtés tend vers zéro. Nous allons démontrer l'existence de cette limite, en supposant que tous les points de l'arc AB soient des points ordinaires. Nous pouvons donc admettre que les équations de la courbe soient de la forme

$$y = \varphi(x), \qquad z = \psi(x),$$

les deux fonctions φ et ψ ayant des dérivées finies et déterminées. Les axes seront supposés rectangulaires.

Soient $x = a$ et $x = b$ les abscisses des extrémités de l'arc AB $(a < b)$. Marquons sur cet arc $n + 1$ points (y compris les extrémités). Soient $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ les abscisses de ces points numérotées par ordre de grandeur, de sorte que $x_1 = a$ et $x_{n+1} = b$ seront celles des extrémités. Désignons par y_i et z_i les valeurs de y et de z pour $x = x_i$. Inscrivons dans l'arc AB un polygone ayant ces $(n + 1)$ points pour sommets. Le côté c_i qui joint les points d'abscisses x_i et x_{i+1} a pour longueur

$$c_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}.$$

Mais on a, par la formule des accroissements finis, X_i et ξ_i étant compris entre x_i et x_{i+1},

$$y_{i+1} - y_i = (x_{i+1} - x_i)\,\varphi'(X_i), \qquad z_{i+1} - z_i = (x_{i+1} - x_i)\,\psi'(\xi_i).$$

Désignons par M_i et m_i les limites supérieure et inférieure de la fonction $\varphi'(x)^2$ dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}) et par θ une quantité de valeur absolue moindre que 1 ; on a évidemment

$$\varphi'(X_i)^2 = \varphi'(\xi_i)^2 + \theta\,(M_i - m_i)$$

Donc, en posant, en abrégé,

$$\delta_i = (x_{i+1} - x_i),$$

on peut mettre c_i sous la forme

$$c_i = \delta_i \sqrt{1 + \varphi'(\xi_i)^2 + \psi'(\xi_i)^2 + \theta\,(M_i - m_i)}.$$

Si l'on remarque que la racine carrée d'une quantité supérieure à l'unité varie moins rapidement que cette quantité [1], on en conclut qu'on peut poser

$$c_i = \delta_i \sqrt{1 + \varphi'(\xi_i)^2 + \psi'(\xi_i)^2}$$

avec une erreur moindre en valeur absolue que $(M_i - m_i)\,\delta_i$.

[1] En effet, si a est > 1, on a, quel que soit x,

$$\left|\sqrt{a + x} - \sqrt{a}\right| = \left|x : (\sqrt{a + x} + \sqrt{a})\right| < |x|$$

Soit donc P le périmètre du polygone inscrit ; on aura

$$P = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \sqrt{1 + \varphi'(\xi_i)^2 + \psi'(\xi_i)^2}$$

avec une erreur moindre que $\Sigma(M_i - m_i)\delta_i$.

Faisons tendre tous les côtés du polygone, et par suite, tous les δ_i vers zéro ; on aura, à la limite, par définition de l'intégrale (n° 206),

$$\lim P = \int_a^b dx \sqrt{1 + \varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2},$$

sans aucune erreur, car, comme la fonction continue $\varphi'(x)^2$ est intégrable, les deux sommes $\Sigma M_i\delta_i$ et $\Sigma m_i\delta_i$ tendent vers la même limite et $\Sigma(M_i - m_i)\delta_i$ tend vers zéro.

L'arc variable AM compris entre un point fixe A d'abscisse a et un point variable M d'abscisse x est une fonction s de x. Cette fonction est continue et admet une dérivée. On a, en effet,

$$(13) \qquad s = \int_a^x dx \sqrt{1 + \varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2},$$

$$(14) \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2}.$$

La *différentielle de l'arc* sera donc représentée par la formule

$$(15) \qquad ds = dx\sqrt{1 + \varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Dans les calculs précédents, tous les radicaux ont été pris positivement, ce qui revient à considérer l'arc s comme croissant dans le même sens que x. Dans l'hypothèse inverse, tous les radicaux devraient être pris négativement. Nous ferons (sauf indication contraire) la première hypothèse, chaque fois que x sera pris comme variable indépendante.

265. Théorème. — *Le rapport d'un arc infiniment petit à la corde qui le sous-tend a pour limite l'unité.*

En effet, soient Δs la longueur de l'arc, Δx, Δy et Δz les différences des coordonnées des extrémités. La corde correspondante c a pour mesure $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. Lorsque ces quantités tendent vers zéro, on a

$$\lim \frac{\Delta s}{c} = \lim \frac{\dfrac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}} = \frac{\dfrac{ds}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}} = 1,$$

en vertu de la formule (15). Le signe du radical ne donne pas lieu à discussion, car il ne s'agit dans le théorème que de longueurs absolues.

266. Dérivée et différentielle d'un arc de courbe dans le cas d'une représentation paramétrique. — La formule (15) peut se mettre sous la forme

$$(16) \qquad ds = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\,.$$

Cette formule ne contient plus que les différentielles des coordonnées et elle ne dépend plus en rien du mode de représentation choisi pour la courbe. Elle est donc générale et elle s'applique au cas d'une représentation paramétrique. Les coordonnées x, y, z sont alors des fonctions de t ayant pour dérivées x', y', z'. Remplaçons dx, dy, dz par $x'dt$, $y'dt$, $z'dt$. La formule (16) deviendra

$$(17) \qquad ds = \pm\, dt \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

et la dérivée s' de s par rapport à t sera

$$(18) \qquad s' = \pm \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Le signe à donner aux radicaux dépend du sens dans lequel on compte l'arc. Sauf indication contraire, nous leur donnerons le signe $+$, ce qui revient à compter l'arc dans le sens où t varie en croissant.

267. Cosinus directeurs de la tangente à une courbe. — Nous désignerons par α, β, γ les cosinus des angles que fait la tangente avec les axes coordonnées. On leur donne le nom de *cosinus directeurs* de cette droite. Pour les définir sans ambiguité, nous considérerons la tangente menée au point M (x, y, z) dans le sens des arcs croissants. Les cosinus directeurs de la droite MM′ qui joint le point M au point M′ de coordonnées $(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$ sont, c désignant la longueur absolue de la droite MM′,

$$\frac{\Delta x}{c}, \quad \frac{\Delta y}{c}, \quad \frac{\Delta z}{c}.$$

Soit Δs l'arc MM′ ; Δs sera positif si MM′ est mené dans le sens des arcs croissants. Or les expressions précédentes peuvent s'écrire

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}\,\frac{\Delta s}{c}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s}\,\frac{\Delta s}{c}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s}\,\frac{\Delta s}{c}.$$

Supposons que M′ tende vers M ; Δs et c étant positifs, $\Delta s : c$ aura

pour limite + 1 (n° 265). Les cosinus directeurs de la direction MM′ deviennent, à la limite,

$$(19)\qquad \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{x'}{s'}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{s'}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{z'}{s'}.$$

Tels sont en grandeur et en signe les cosinus directeurs de la tangente menée dans le sens des arcs croissants.

En remplaçant s' par sa valeur (**18**) ces formules peuvent s'écrire

$$(20)\qquad \frac{\alpha}{x'} = \frac{\beta}{y'} = \frac{\gamma}{z'} = \frac{1}{\pm\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Si le radical est pris positivement, s et t croissent dans le même sens et la tangente est menée dans le sens où t varie en croissant.

Remarque. — Les formules précédentes prouvent que *toute courbe dont les tangentes sont parallèles à une direction fixe, se réduit à une droite*. En effet, soient a, b, c les coefficients de la direction fixe. On aura

$$\frac{x'}{a} = \frac{y'}{b} = \frac{z'}{c}.$$

Donc $x : a$, $y : b$ et $z : c$ ayant même dérivée, ne diffèrent que par des constantes et l'on a

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} + C, \qquad \frac{y}{b} = \frac{z}{c} + C_1.$$

Ce sont les équations d'une droite.

268. Plan tangent à une surface. — *Le lieu géométrique des tangentes menées par un point ordinaire d'une surface à toutes les courbes tracées sur la surface et passant par ce point, est un plan auquel on donne le nom de plan tangent à la surface.*

Supposons que la surface ait pour équation en coordonnées rectangulaires ou obliques

$$(21)\qquad F(x, y, z) = 0.$$

Dans le voisinage d'un point ordinaire, une des trois dérivées partielles de F est différente de zéro et l'on peut supposer que ce soit F'_z. Alors l'équation de la surface pourra être résolue par rapport à z et ramenée à la forme

$$(22)\qquad z = f(x, y),$$

la fonction f ayant des dérivées partielles déterminées que nous désignerons en abrégé par p et par q, de sorte que l'on aura

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Toute courbe tracée sur la surface se projettera sur le plan xy suivant une certaine courbe plane. Considérons une représentation paramétrique de cette courbe plane

$$(23) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

L'ensemble des équations (**22**) et (**23**) fournit une représentation paramétrique correspondante de la courbe tracée sur la surface, car, en remplaçant x et y par $\varphi(t)$ et $\psi(t)$, l'équation (**22**) donne aussi z en fonction de t.

Les équations de la tangente au point M (x, y, z) de cette courbe seront (n° 263)

$$(24) \qquad \frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'}.$$

Mais, en dérivant totalement l'équation (**22**) par rapport à t, on a

$$z' = px' + qy'.$$

En éliminant x', y', z' entre cette équation et les précédentes, on trouve la relation

$$(25) \qquad \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

qui est vérifiée par les coordonnées ξ, η, ζ d'une tangente quelconque passant par M. Cette équation étant du premier degré est celle d'un plan. Ce plan est le plan tangent à la surface au point M.

L'équation (**25**) est surtout usitée quand l'équation de la surface est donnée sous la forme (**22**). Si l'équation de la surface est de la forme (**21**), on substitue les valeurs

$$p = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad q = -\frac{F'_y}{F'_z},$$

dans l'équation (**25**), qui devient

$$(26) \qquad (\xi - x) F'_x + (\eta - y) F'_y + (\zeta - z) F'_z = 0.$$

Donc *l'équation du plan tangent s'obtient en différentiant totalement l'équation de la surface et en remplaçant dx, dy et dz par $\xi - x$, $\eta - y$ et $\zeta - z$.*

Considérons maintenant le cas où la surface est définie par une *représentation paramétrique*

$$(27) \qquad x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v).$$

Il suffit de considérer u et v comme fonctions d'un paramètre unique t pour que les équations précédentes soient celles d'une courbe tracée sur la surface. Les équations de la tangente à cette courbe au point M seront

$$\frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'}.$$

Mais les coefficients de directions x', y' et z' ont maintenant pour expressions :

$$x' = \frac{\partial f_1}{\partial u} u' + \frac{\partial f_1}{\partial v} v',$$

$$y' = \frac{\partial f_2}{\partial u} u' + \frac{\partial f_2}{\partial v} v',$$

$$z' = \frac{\partial f_3}{\partial u} u' + \frac{\partial f_3}{\partial v} v';$$

ils sont donc liés par une relation générale, qui résulte de l'élimination de u' et de v' entre les trois équations précédentes, savoir

$$\begin{vmatrix} x' & \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ y' & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ z' & \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

L'élimination de x', y', z' entre les équations de la tangente et cette relation fournit une équation vérifiée par les coordonnées d'une tangente quelconque passant par M. C'est l'équation du plan tangent. Pour l'obtenir, il suffit de remplacer x', y', z', par $\xi - x$ $\eta - y$ et $\zeta - z$ dans la relation précédente. Nous l'écrirons sous la forme

(**28**) $$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0.$$

D'ailleurs, en un point ordinaire, cette équation ne peut pas se réduire à une identité, car l'un au moins des trois mineurs relatifs à $\xi - x$, $\eta - y$ et $\zeta - z$ n'est pas nul.

269. **Normale à une surface (axes rectangulaires)**. — La normale en un point M (x, y, z) d'une surface est la perpendiculaire élevée au plan tangent en ce point. Les équations de la normale se déduisent immédiatement de celle de ce plan. En effet, les axes étant rectangulaires, les coefficients de direction de la normale sont les coefficients de l'équation du plan tangent. La normale sera représentée par l'un des trois systèmes d'équations, correspondant respectivement à (**25**), (**26**) et (**28**) :

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{\xi - x}{p} = \dfrac{\eta - y}{q} = \dfrac{\zeta - z}{-1}, \\[2ex] \dfrac{\xi - x}{F'_x} = \dfrac{\eta - y}{F'_y} = \dfrac{\zeta - z}{F'_z}, \\[2ex] \dfrac{\xi - x}{y'_u z'_v - z'_u y'_v} = \dfrac{\eta - y}{z'_u x'_v - z'_v x'_u} = \dfrac{\zeta - z}{x'_u y'_v - y'_u x'_v}. \end{cases}$$

Les cosinus directeurs X, Y, Z de la normale se déduisent de ces formules, car ils sont proportionnels aux dénominateurs qui figurent dans chacun des trois systèmes d'équations. Ils se détermineront donc par l'un des trois systèmes correspondants :

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{X}{p} = \dfrac{Y}{q} = \dfrac{Z}{-1} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \\[2ex] \dfrac{X}{F'_x} = \dfrac{Y}{F'_y} = \dfrac{Z}{F'_z} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}. \\[2ex] \dfrac{X}{y'_u z'_v - z'_u y'_v} = \dfrac{Y}{z'_u x'_v - x'_u z'_v} = \dfrac{Z}{x'_u y'_v - y'_u z'_v}. \end{cases}$$

Le double signe qui figure dans ces équations correspond aux deux sens différents dans lesquels on peut mener la normale à la surface.

§ 2. Plan osculateur.
Courbure et torsion des courbes gauches.

270. Représentation de la courbe. — Dans tout le paragraphe actuel, nous considérerons la représentation paramétrique suivante d'une courbe gauche :

$$(1)\qquad x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t)$$

et nous supposerons les axes coordonnés rectangulaires.

Plusieurs des formules que nous établirons se simplifient quand on prend s comme variable indépendante. Pour éviter toute confusion dans les formules, nous numéroterons en chiffres romains celles qui se rapportent à cette hypothèse spéciale.

271. Plan osculateur. — *Le plan osculateur en un point* M *d'une courbe gauche est la limite d'un plan passant par le point* M *et deux autres points* M' *et* M'' *de la courbe qui se rapprochent indéfiniment du premier.*

L'équation d'un plan quelconque est de la forme

$$(2)\qquad A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0.$$

Posons, A, B, C et P désignant des constantes et x, y, z les fonctions (1) de t écrites ci-dessus,

(3) $$F(t) = Ax + By + Cz + P.$$

Soient t, t_1 et t_2 les valeurs du paramètre qui correspondent aux trois points M, M′ et M″ ; les équations qui expriment que le plan (2) passe par ces trois points sont :

$$F(t) = 0, \qquad F(t_1) = 0, \qquad F(t_2) = 0.$$

Mais alors, en vertu du théorème de Rolle, F′ a une racine τ comprise entre t et t_1 et une autre racine τ' comprise entre t_1 et t_2. Pour la même raison, F″ a une racine τ_1 comprise entre τ et τ'. On a donc les trois équations :

$$F(t) = 0, \qquad F'(\tau) = 0, \qquad F''(\tau_1) = 0.$$

Faisons tendre M′ et M″ vers M, c'est-à-dire t_1 et t_2 vers t ; τ et τ_1 tendent aussi vers t et, à la limite, les trois équations précédentes deviennent :

(4ᴬ) $$F(t) = 0, \qquad F'(t) = 0, \qquad F''(t) = 0.$$

Ce sont les trois équations qui déterminent les coefficients de l'équation du plan osculateur. En les développant, il vient :

(4ᴮ) $$\begin{cases} Ax + By + Cz + P = 0, \\ Ax' + By' + Cz' = 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' = 0. \end{cases}$$

Soustrayant de (2) la première des équations (4), on met l'équation du plan osculateur sous la forme très usitée

(5) $$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0.$$

En éliminant A, B et C entre cette équation et les deux dernières équations (4), on met l'équation du plan osculateur sous forme de déterminant

(6) $$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Les coefficients A, B, C ne sont déterminés qu'à un facteur près par les équations précédentes. Mais nous conviendrons de désigner par A, B et C les coefficients qui figurent dans l'équation (6), de sorte que nous poserons

(7) $$A = y'z'' - z'y'', \qquad B = z'x'' - x'z'', \qquad C = x'y'' - y'x''.$$

Les équations (5) et (6) ne représentent le plan osculateur que si

l'une au moins des quantités A, B et C est différente de zéro. Si ces trois quantités s'annulaient simultanément en un point, les deux équations se réduiraient à des identités et l'équation du plan osculateur devrait être modifiée. Nous laisserons de côté ces points exceptionnels pour le moment.

Remarque I. — Il est impossible que les trois quantités A, B, C s'annulent à la fois tout le long d'une courbe. En effet, on aurait tout le long de cette courbe

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,x' = \mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,y' = \mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,z'.$$

Donc $\mathrm{Log}\,x'$, $\mathrm{Log}\,y'$, $\mathrm{Log}\,z'$ ayant même dérivée ne différeraient que par des constantes et les quantités x', y', z' seraient dans un rapport constant. On pourrait donc poser

$$\frac{x'}{a} = \frac{y'}{b} = \frac{z'}{c}.$$

La direction de la tangente étant constante, la courbe se réduirait à une droite (n° 267).

Remarque II. — Considérons maintenant A, B et C comme des fonctions de t définies par les équations (7) et différentions totalement la seconde des équations (4^{B}) en tenant compte de la troisième. Il vient

$$(8) \qquad \mathrm{A}'x' + \mathrm{B}'y' + \mathrm{C}'z' = 0.$$

De cette dernière équation et de la seconde équation (4^{B}), on tire les relations

$$(9) \qquad \frac{x'}{\mathrm{BC}'-\mathrm{CB}'} = \frac{y'}{\mathrm{CA}'-\mathrm{AC}'} = \frac{z'}{\mathrm{AB}'-\mathrm{BA}'},$$

qui nous serviront tout à l'heure.

272. Théorème. — *Le plan mené par la tangente au point* M *parallèlement à la tangente au point infiniment voisin* M' *a pour limite le plan osculateur.*

Soit (2) l'équation de ce plan. La condition de passer par M donne $\mathrm{F}(t) = 0$; la condition d'être parallèle à la tangente au point M dont les cosinus directeurs sont proportionnels à x', y', z' donne $\mathrm{A}x' + \mathrm{B}y' + \mathrm{C}z' = 0$ ou $\mathrm{F}'(t) = 0$; de même, la condition d'être parallèle à la tangente au point M' donne $\mathrm{F}'(t_1) = 0$. Mais alors, en vertu du théorème de Rolle, F'' a une racine τ comprise entre t et t_1.

Les coefficients du plan considéré vérifient donc les trois équations

$$F(t) = 0, \qquad F'(t) = 0, \qquad F''(\tau) = 0.$$

Quand M' tend vers M, t_1 tend vers t et τ également. Donc les coefficients du plan limite vérifient les trois équations :

$$F(t) = 0, \qquad F'(t) = 0, \qquad F''(t) = 0.$$

Ce sont les mêmes que pour le plan osculateur.

273. Théorème. — *La droite, intersection du plan osculateur en* M *avec le plan osculateur en un point infiniment voisin* M' *a pour limite la tangente en* M.

Considérons x, y, z et A, B, C comme les fonctions de t définies par les équations (**1**) et (**7**) et posons, ξ, η, ζ désignant des variables indépendantes de t,

$$\Phi(t) = A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z).$$

Les équations des plans osculateurs aux points M et M' qui correspondent aux valeurs t et t_1 du paramètre pourront s'écrire

$$\Phi(t) = 0, \qquad \Phi(t_1) = 0.$$

Les coordonnées ξ, η, ζ de l'intersection de ces deux plans vérifient ces deux équations à la fois ; mais alors, en vertu du théorème de Rolle, elles vérifient aussi $\Phi'(\tau) = 0$, τ étant compris entre t et t_1. Quand M' tend vers M, t_1 et τ tendent vers t. Donc les coordonnées ξ, η, ζ de l'intersection limite vérifient les deux équations $\Phi(t) = 0$ et $\Phi'(t) = 0$. En remplaçant Φ et Φ' par leurs développements, et en observant que $Ax' + By' + Cz' = 0$, il vient

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0,$$
$$A'(\xi - x) + B'(\eta - y) + C'(\zeta - z) = 0.$$

d'où l'on tire

$$\frac{\xi - x}{BC' - B'C} = \frac{\eta - y}{CA' - C'A} = \frac{\zeta - z}{AB' - A'B}$$

et, à cause de (**9**),

$$\frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'}.$$

Les coordonnées ξ, η, ζ de la droite d'intersection limite vérifient donc les équations de la tangente au point M. Ainsi cette droite se confond avec la tangente.

274. Cercle osculateur. — *Le cercle osculateur en un point* M *d'une courbe gauche est la limite d'un cercle passant par ce point et par deux*

autres points M′ *et* M″ *de la courbe qui se rapprochent indéfiniment du premier.*

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre et R le rayon du cercle passant par les trois points M, M′ et M″. Soient t, t_1 t_2 les valeurs du paramètre correspondant à ces trois points. Considérons x, y, z comme fonctions de t et posons

$$F(t) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - R^2.$$

Les quantités x_1, y_1, z_1 et R vérifieront les trois équations :

$$F(t) = 0, \qquad F(t_1) = 0, \qquad F(t_2) = 0,$$

qui expriment que le centre (x_1, y_1, z_1) est à la distance R des trois points M, M′ et M″. On en conclut, comme dans le cas d'une courbe plane (n° 252), que les éléments x_1, y_1, z_1 et R du cercle osculateur vérifient les trois équations :

$$F(t) = 0, \qquad F'(t) = 0, \qquad F''(t) = 0.$$

D'autre part, le cercle osculateur étant dans le plan osculateur, qui est la limite du plan MM′M″, les coordonnées du centre vérifient l'équation (**5**) de ce plan. On a donc

$$(\mathbf{10}) \qquad A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Ajoutons à celle-ci les équations $F'(t) = 0$ et $F''(t)$, qui développées deviennent

$$(\mathbf{11}) \qquad \begin{cases} x'(x - x_1) + y'(y - y_1) + z'(z - z_1) = 0, \\ x''(x - x_1) + y''(y - y_1) + z''(z - z_1) = -(x'^2 + y'^2 + z'^2). \end{cases}$$

Nous formerons un système de trois équations, résoluble par rapport à $(x - x_1)$, $(y - y_1)$ et $(z - z_1)$ et d'où l'on tire, en observant que le déterminant du système est $A^2 + B^2 + C^2$,

$$(\mathbf{12}) \qquad \frac{x_1 - x}{Bz' - Cy'} = \frac{y_1 - y}{Cx' - Az'} = \frac{z_1 - z}{Ay' - Bx'} = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Ces équations déterminent les coordonnées x_1, y_1 et z_1 du centre du cercle osculateur.

Le rayon R se détermine ensuite au moyen de l'équation $F(t) = 0$, qui donne

$$R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Remplaçons dans le second membre les parenthèses par leurs valeurs tirées du système précédent, et ayons égard à l'identité

$$(Bz' - Cy')^2 + (Cx' - Az')^2 + (Ay' - Bx')^2 =$$
$$(A^2 + B^2 + C^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (Ax' + By' + Cz')^2 ;$$

il viendra, puisque ce dernier carré est nul (4^{E}),

$$R^2 = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}{A^2 + B^2 + C^2},$$

d'où

(13) $$R = \frac{s'^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

On cherche pour R une valeur positive, de sorte qu'on donnera à ce dernier radical le signe de s'.

Remarque. — Le centre du cercle osculateur se trouve, comme on l'a vu plus haut, dans le plan osculateur. Il se trouve aussi dans le plan normal. En effet, la première des équations (**11**), $F'(t) = 0$, exprime que les coordonnées x_1, y_1, z_1 vérifient l'équation du plan normal.

275. Simplification des formules quand s est pris comme variable indépendante. — On trouve des résultats particulièrement simples quand on choisit l'arc s comme variable indépendante. On a, dans ce cas, $s' = 1$ c'est-à-dire que

(I) $$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Considérons le système formé de l'équation dérivée de la précédente et de la dernière équation (**4**), savoir

(II) $$\begin{cases} x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' = 0. \end{cases}$$

On voit que x'', y'' et z'' vérifient les deux mêmes équations linéaires et homogènes que $(x - x_1)$, $(y - y_1)$ et $(z - z_1)$, savoir l'équation (**10**) et la première des équations (**11**). Donc on a

(III) $$\frac{x_1 - x}{x''} = \frac{y_1 - y}{y''} = \frac{z_1 - z}{z''}.$$

Par les propriétés des rapports égaux, ces fractions sont encore égales aux deux suivantes :

(IV) $$\frac{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}{x''(x_1 - x) + y''(y_1 - y) + z''(z_1 - z)} = \frac{(x_1 - x)x'' + (y_1 - y)y'' + (z_1 - z)z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

qui se réduisent simplement à

(V) $$\frac{R^2}{1} = \frac{1}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

car la seconde équation (11) devient maintenant

$$x''(x_1 - x) + y''(y_1 - y) + z''(z_1 - z) = 1.$$

En définitive, il vient donc

$$\text{(VI)} \qquad \frac{x_1 - x}{x''} = \frac{y_1 - y}{y''} = \frac{z_1 - z}{z''} = \mathrm{R}^2 = \frac{1}{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

Telles sont les équations très simples qui déterminent x_1, y_1, z_1 et R quand s est pris comme variable indépendante.

276. Courbure. Rayon de courbure. — La courbure se définit dans les courbes gauches comme dans les courbes planes. Considérons sur la courbe deux points M et M′ et menons les tangentes MT et M′T′ en ces deux points dans le sens des arcs croissants. L'angle de ces deux tangentes est la *courbure de l'arc* MM′, le rapport de cet angle à la longueur de l'arc est sa *courbure moyenne*, enfin la limite de la courbure moyenne quand le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, s'appelle la *courbure de la courbe au point* M.

Le *rayon de courbure au point* M est le rayon d'un cercle ayant même courbure que la courbe en ce point. Le rayon de courbure R est donc égal à l'inverse de la courbure.

Pour déterminer ce rayon, désignons par α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente MT au point $\mathrm{M}(x, y, z)$, par $\alpha + \Delta\alpha$, $\beta + \Delta\beta$, $\gamma + \Delta\gamma$ ceux de la tangente M′T′ au point M′, par φ l'angle des deux tangentes MT et M′T′ ; on aura

$$\cos\varphi = \alpha(\alpha + \Delta\alpha) + \beta(\beta + \Delta\beta) + \gamma(\gamma + \Delta\gamma).$$

Mais, en ajoutant membre à membre les deux relations

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad (\alpha + \Delta\alpha)^2 + (\beta + \Delta\beta)^2 + (\gamma + \Delta\gamma)^2 = 1,$$

qui ont lieu respectivement entre les cosinus directeurs d'une droite relativement à trois axes rectangulaires, il vient

$$2[\alpha(\alpha + \Delta\alpha) + \beta(\beta + \Delta\beta) + \gamma(\gamma + \Delta\gamma)] = 2 - (\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2 + \Delta\gamma^2).$$

Le premier membre est $2\cos\varphi$, il vient donc

$$\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2 + \Delta\gamma^2 = 2(1 - \cos\varphi) = \left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2.$$

Remarquons que le rapport de $2\sin\frac{\varphi}{2}$ à φ a pour limite l'unité quand φ tend vers zéro. Donc on peut, sans en changer la limite, substituer ces deux quantités l'une à l'autre dans un rapport d'infiniment petits. Soit Δs la longueur de l'arc infiniment petit MM′ ; la courbure

au point M est égale à la limite de $\varphi : \Delta s$. Comme la courbure est aussi égale à $1 : R$, il vient

$$\frac{1}{R^2} = \lim \left(\frac{\varphi}{\Delta s}\right)^2 = \lim \left(\frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\Delta s}\right)^2 = \lim \frac{\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2 + \Delta\gamma^2}{\Delta s^2}.$$

On a donc, en définitive,

$$(14) \qquad \frac{1}{R^2} = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}{ds^2} = \frac{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}{s'^2}.$$

Le rayon de courbure est égal au rayon du cercle osculateur. En effet, si l'on prend s comme variable indépendante, α, β et γ se réduisent à x', y' et z' (n° 267), donc α', β' et γ' à x'', y'' et z'', enfin $s' = 1$; il vient donc

$$(\text{VII}) \qquad \frac{1}{R^2} = x''^2 + y''^2 + z''^2.$$

C'est précisément la valeur (VI) du rayon du cercle osculateur trouvée au n° précédent.

On considère R comme essentiellement positif, son expression en fonction des dérivées des coordonnées quelle que soit la variable indépendante, sera donc (**13**)

$$(\mathbf{13})' \qquad R = \frac{s'^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

où le radical reçoit le signe de s'.

Le cercle osculateur, ayant pour rayon le rayon de courbure, reçoit, à cause de cela, le nom de *cercle de courbure* et son centre celui de *centre de courbure*.

Remarque. — La formule (**14**) prouve qu'*une ligne dont la courbure est constamment nulle se réduit à une droite* [1]. En effet, on a alors $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 0$. Chacun des carrés, étant réel, doit être nul séparément. Donc α, β et γ sont constants et la ligne est droite (n° 267).

277. Position du rayon de courbure. Normale principale. — On considère généralement le rayon de courbure comme déterminé de situation et de direction dans l'espace. C'est la droite menée du point M au

[1] Toute la théorie exposée ici concerne les courbes réelles. Le théorème ne s'applique pas aux courbes imaginaires. Cette observation s'étend d'ailleurs à plusieurs des théorèmes énoncés plus loin ou proposés comme exercices.

centre de courbure correspondant, dont les coordonnées x_1, y_1 et z_1 ont été déterminées précédemment (n° 275). La droite dirigée suivant le rayon de courbure est normale à la courbe et située dans le plan osculateur (n° 274). On lui donne le nom de *normale principale*. Les cosinus directeurs λ, μ et ν de la normale principale se déduisent sans ambiguïté de signe des équations (12) en y faisant les substitutions :

$$x_1 - x = R\lambda, \qquad y_1 - y = R\mu, \qquad z_1 - z = R\nu.$$

On arrive à un résultat plus simple quand on prend s comme variable indépendante. On peut alors faire les substitutions précédentes dans les équations (VI) et il vient

$$\text{(VIII)} \qquad \frac{\lambda}{x''} = \frac{\mu}{y''} = \frac{\nu}{z''} = R.$$

Il est facile de déduire de ce cas particulier des équations générales. On a, en effet, dans ce cas particulier,

$$\text{(IX)} \qquad x'' = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{d\alpha}{ds}, \qquad y'' = \frac{d\beta}{ds}, \qquad z'' = \frac{d\gamma}{ds}.$$

Les équations (VIII) peuvent donc s'écrire

$$\text{(15)} \qquad \frac{\lambda}{d\alpha} = \frac{\mu}{d\beta} = \frac{\nu}{d\gamma} = \frac{R}{ds}$$

et, comme celles-ci ne renferment plus que des différentielles premières, elles ont lieu, quelle que soit la variable indépendante. Elles peuvent aussi s'écrire, en divisant tous les dénominateurs par dt,

$$\text{(16)} \qquad \frac{\lambda}{\alpha'} = \frac{\mu}{\beta'} = \frac{\nu}{\gamma'} = \frac{R}{s'}.$$

Si l'on y fait les substitutions :

$$\alpha' = \left(\frac{x'}{s'}\right)' = \frac{s'x'' - x's''}{s'^2}, \qquad \beta' = \frac{s'y'' - y's''}{s'^2}, \qquad \gamma' = \frac{s'z'' - z's''}{s'^2},$$

on les mettra sous la forme

$$\text{(17)} \qquad \frac{\lambda}{x'' - x'\dfrac{s''}{s'}} = \frac{\mu}{y'' - y'\dfrac{s''}{s'}} = \frac{\nu}{z'' - z'\dfrac{s''}{s'}} = \frac{R}{s'^2}.$$

Comme s'' change de signe en même temps que s', ces formules mettent en évidence que λ, μ, ν ne dépendent pas du sens dans lequel on compte les arcs.

278. Directions principales. — Par le point M d'une courbe menons *la tangente* dans le sens des arcs croissants, *la normale principale* et

la perpendiculaire au plan osculateur. Cette dernière droite, qui est perpendiculaire aux deux autres, s'appelle, à cause de cela, *la binormale.* Ces trois droites forment, en chaque point d'une courbe, *le trièdre principal* et leurs directions, qui sont perpendiculaires entre elles, s'appellent *les directions principales.*

Les cosinus directeurs α, β et γ de la tangente MT, menée dans le sens des arcs croissants, sont définis sans ambiguité par les formules du n° 267 :

$$\frac{\alpha}{x'}=\frac{\beta}{y'}=\frac{\gamma}{z'}=\frac{1}{s'}.$$

Les cosinus directeurs λ, μ, ν de la normale principale MN le sont également par les formules (17) :

$$\frac{\lambda}{x''-x'\dfrac{s''}{s'}}=\frac{\mu}{y''-y'\dfrac{s''}{s'}}=\frac{\nu}{z''-z'\dfrac{s''}{s'}}=\frac{R}{s'^2}.$$

Nous désignerons par X, Y et Z les cosinus directeurs de la binormale MB. Ceux-ci étant proportionnels aux coefficients A, B et C de l'équation du plan osculateur, on aura

$$\frac{X}{A}=\frac{Y}{B}=\frac{Z}{C}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{18}$$

Le radical est susceptible d'un double signe, qui correspond aux deux sens opposés dans lesquels on peut mener la binormale MB. Pour déterminer ce sens et, par conséquent, le signe du radical, il faut une nouvelle convention. Nous indiquerons celle que l'on fait d'habitude dans le numéro suivant :

279. Convention sur le sens de la binormale. — *Nous conviendrons de mener la binormale* MB *de telle manière que le trièdre principal* MTNB *soit de même rotation que celui* OXYZ *des axes coordonnés*, c'est-à-dire que ces deux trièdres soient superposables, MT sur OX, MN sur OY et MB sur OZ.

Pour réaliser cette condition, nous allons montrer qu'*il faut donner au radical qui figure dans les formules* (18) *le signe de* s'.

En effet, considérons le déterminant δ formé avec les cosinus directeurs des directions principales

$$\delta=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \lambda & \mu & \nu\\ X & Y & Z\end{vmatrix}$$

Substituons aux éléments des deux premières lignes leurs valeurs

tirées des équations du n° précédent. Il vient, par les propriétés des déterminants,

$$\delta = \frac{R}{s'^3} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' - x'\frac{s''}{s'} & y'' - y'\frac{s''}{s'} & z'' - z'\frac{s''}{s'} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \frac{R}{s'^3} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

d'où

$$\delta = \frac{R}{s'^3}(AX + BY + CZ).$$

Remplaçons X, Y, Z par leurs valeurs tirées des formules (18) ; il vient, le radical étant le même que dans ces formules,

$$\delta = \frac{R}{s'^3}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Reportons-nous à la valeur (**13**) de R; il en résulte que δ est égal à + 1 ou à — 1 suivant que le radical a le signe de s' ou le signe contraire [1]. Donc, le radical recevant le signe de s', on a $\delta = +1$.

C'est la condition qui exprime que les deux trièdres MTNB et OXYZ sont de même rotation.

En effet, on peut toujours par un déplacement continu amener MT en coïncidence avec OX et MN en coïncidence avec OY. Alors MB est dirigé suivant OZ ou en sens contraire ; selon qu'on se trouve dans l'une ou l'autre hypothèse, on aura Z = ± 1 d'où

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Mais, si δ était égal à + 1 avant le déplacement, il le sera encore après, car il ne peut changer brusquement de valeur pendant le déplacement. Donc MB sera venu en coïncidence avec OZ.

281. Torsion. Rayon de torsion. — Après avoir considéré l'angle de deux tangentes menées en deux points différents M et M' de la courbe, il est naturel de considérer l'angle de deux plans osculateurs. On arrive ainsi à la notion de *seconde courbure* ou de *torsion*.

L'angle ψ des plans osculateurs aux points M et M' s'appelle *la torsion de l'arc* MM' ; le rapport de la torsion à la longueur de cet arc est la *torsion moyenne* de cet arc ; la limite de la torsion moyenne de l'arc MM' quand M' tend vers M est *la torsion de la courbe au*

[1] Le déterminant δ formé avec les cosinus directeurs de trois directions rectangulaires est toujours égal à + 1 ou à — 1. On le vérifie immédiatement en élevant ce déterminant au carré par la règle connue.

point M. Le *rayon de torsion* T au point M est l'inverse de la torsion en ce point.

Remarquons que l'angle des plans osculateurs aux points M et M' est le même que celui des binormales en ces mêmes points. Les cosinus directeurs de la binormale ont été désignés par X, Y et Z. Donc le même calcul que celui qui a été fait au nº 276 pour déterminer 1 : R au moyen des cosinus directeurs α, β et γ de la tangente, donnera, dans le cas actuel,

$$\text{(19)} \qquad \frac{1}{T^2} = \frac{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}{s'^2}.$$

Cette formule suffit pour déterminer la valeur absolue de la torsion et du rayon de torsion. Un examen plus approfondi conduit cependant à donner un signe à la torsion. C'est ce qui sera fait dans les numéros suivants où nous donnerons en même temps la valeur de T en fonction des dérivées de x, y, z.

La formule (**19**) prouve que *toute courbe qui a une torsion constamment nulle est une courbe plane.* En effet, 1 : T étant nul, on a $X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 0$. Comme on suppose X', Y' et Z' réels, ces quantités sont nulles séparément et X, Y, Z sont des constantes. On a alors

$$Xx + Yy + Zz = \text{const.}$$

car le premier membre a pour dérivée $Xx' + Yy' + Zz'$, c'est-à-dire 0 puisque la binormale est perpendiculaire à la tangente. Donc les coordonnées x, y, z vérifient l'équation d'un plan.

282. Signe de la torsion. Détermination du rayon de torsion en grandeur et en signe. — On a les trois équations :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \quad Xx' + Yy' + Zz' = 0, \quad Xx'' + Yy'' + Zz'' = 0,$$

car la première devient identique et les deux suivantes se réduisent aux équations (**4**B) quand on remplace X, Y, Z par leurs valeurs (**18**). Dérivons les deux premières de ces équations en tenant compte de la troisième. Il vient

$$\text{(20)} \qquad XX' + YY' + ZZ' = 0, \qquad x'X' + y'Y' + z'Z' = 0.$$

Ces deux équations expriment qu'une droite qui a pour coefficient de direction X'Y' et Z' est perpendiculaire à la binormale et à la tangente. Ces coefficients de direction sont donc ceux de la normale principale et l'on peut poser

$$\frac{X'}{\lambda} = \frac{Y'}{\mu} = \frac{Z'}{\nu} = \pm\frac{\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}} = \pm\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}.$$

Ce dernier radical a la même valeur absolue que s' : T, en vertu de l'équation (**19**). Tandis que nous avons considéré R comme essentiellement positif, nous conviendrons de donner un signe à T. Nous choisirons ce signe de manière que s' : T ait le même signe que les rapports égaux qui précèdent, c'est-à-dire de manière à pouvoir poser le système de formules

$$(\mathbf{21}) \qquad \frac{X'}{\lambda} = \frac{Y'}{\mu} = \frac{Z'}{\nu} = \frac{s'}{T}.$$

Ces formules déterminent T en grandeur et en signe. Mais il convient d'obtenir la valeur de T en fonction des dérivées des coordonnées du point M. On tire des égalités précédentes par les propriétés des rapports égaux :

$$\frac{s'}{T} = \frac{\lambda X' + \mu Y' + \nu Z'}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} = \lambda X' + \mu Y' + \nu Z'.$$

Remplaçons λ, μ, ν par leurs valeurs tirées des équations (**17**) et tenons compte de l'équation (**20**) $x'X' + y'Y' + z'Z' = 0$; il restera

$$\frac{s'}{T} = \frac{R}{s'^2}(x''X' + y''Y' + z''Z').$$

Mais, en dérivant la relation $x''X + y''Y + z''Z = 0$, on trouve

$$x''X' + y''Y' + z''Z' = -(x'''X + y'''Y + z'''Z).$$

Substituons cette valeur et remplaçons encore X, Y et Z par leurs expressions (**18**) où le radical a le signe de s', il vient

$$\frac{1}{T} = -\frac{R}{s'^3}\,\frac{Ax''' + By''' + Cz'''}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Remplaçons R par sa valeur $s'^3 : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ (n° 274) où le radical a le même signe que dans la formule précédente et posons, en abrégé,

$$(\mathbf{22}) \qquad D = Ax''' + By''' + Cz''' = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

On aura finalement

$$(\mathbf{23}) \qquad \frac{1}{T} = -\frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Cette formule détermine T en grandeur et en signe. On voit que T s'exprime rationnellement en fonction des coordonnées du point M, ce qui n'avait pas lieu pour le rayon de courbure. Le signe de la torsion est, de plus, indépendant du sens dans lequel on compte les arcs, car cette formule ne dépend pas de s'.

283. Interprétation géométrique du signe de la torsion. — Les deux signes dont la torsion est susceptible correspondent aux deux sens diffé-

rents dans lesquels le plan osculateur peut tourner autour de la tangente lorsque le point M se déplace sur la courbe dans un sens déterminé.

Soient OXYZ les axes coordonnés et MTNB le trièdre principal (nº 278). Par un déplacement continu des axes, on pourra amener OX en coïncidence avec MT et faire en sorte que MN tombe entre OY et OZ. Alors, comme les deux trièdres sont de même rotation, MB tombera entre OZ et le prolongement de OY comme l'indique la fig. 9.

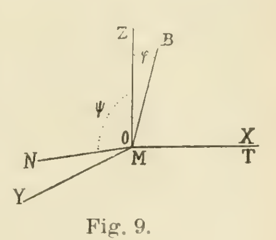
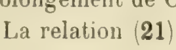


Fig. 9.


La relation (21)

$$\frac{1}{T} = \frac{Z'}{\nu s'}$$

subsiste pendant ce déplacement et l'on en conclut que ses deux membres sont invariables, car le premier a une valeur absolue fixe et le second ne peut changer brusquement de valeur.

Les axes étant dans leur nouvelle position, soient φ l'angle ZOB et ψ l'angle ZON. Ces deux angles sont complémentaires ; on a donc

$$\nu = \cos\psi, \qquad Z = \cos\varphi, \qquad Z' = -\varphi' \sin\varphi = -\varphi' \cos\psi,$$

et il vient

$$\frac{1}{T} = \frac{Z'}{\nu s'} = -\frac{\varphi'}{s'} = -\frac{d\varphi}{ds}.$$

Donc φ et s varient en sens contraire si T est positif, et dans le même sens si T est négatif.

Supposons que le point M se déplace dans la direction de la tangente MT, c'est-à-dire dans celle des arcs croissants. Si T est positif, φ diminue, donc MB tourne vers MZ et, par suite, vers MN (fig. 9). L'inverse a lieu, si T est négatif. De là cette conclusion :

Lorsque le point M *se déplace sur la courbe dans le sens des arcs croissants, la rotation de la binormale autour de la tangente se fait du côté de la normale principale si* T *est positif, et du côté opposé si* T *est négatif.*

Cette règle s'applique, quel que soit le sens de rotation du trièdre OXYZ. Supposons maintenant ce trièdre donné comme d'habitude. Alors, pour un observateur qui se tient debout sur le plan YZ du côté de OX, la rotation de OZ vers OY se fait dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Dans ce cas, la règle précédente pourra se transformer dans la suivante :

Un observateur immobile qui voit venir à lui le point M, *verra tourner le plan osculateur dans le sens inverse des aiguilles d'une montre si* T *est positif et dans le sens de ces aiguilles si* T *est négatif.*

On dit que l'allure de la courbe est *dextrorsum* dans le premier cas (T positif) et *sinistrorsum* dans le second (T négatif).

Cette distinction est évidemment indépendante du sens dans lequel se fait le mouvement. En effet, si ce sens vient à changer, le sens de la rotation est renversé, mais, comme la position de l'observateur est renversée en même temps, les apparences restent les mêmes.

284. Formules de Frenet. — Les formules de Frenet jouent un rôle important dans la théorie des courbes gauches. Elles ont pour objet d'exprimer les différentielles des cosinus directeurs des directions principales en fonction de ces cosinus eux-mêmes, de la courbure et de la torsion.

Nous connaissons déjà deux de ces systèmes de formules (nos 277 et 282) :

$$(24) \qquad \frac{d\alpha}{\lambda} = \frac{d\beta}{\mu} = \frac{d\gamma}{\nu} = \frac{ds}{R},$$

$$(25) \qquad \frac{dX}{\lambda} = \frac{dY}{\mu} = \frac{dZ}{\nu} = \frac{ds}{T}.$$

Nous allons établir le troisième qui donne $d\lambda$, $d\mu$ et $d\nu$. A cet effet, observons que α, λ et X sont les cosinus des angles faits par OX avec trois droites rectangulaires ; on a donc

$$\alpha^2 + \lambda^2 + X^2 = 1.$$

En différentiant cette relation, on en tire, eu égard aux valeurs de $d\alpha$ et dX tirées des systèmes précédents,

$$\lambda d\lambda = -\alpha d\alpha - X dX = -\lambda ds\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{X}{T}\right),$$

ce qui fournit la valeur de $d\lambda$. Les différentielles $d\mu$ et $d\nu$ s'obtiennent de même. Le troisième système de formules sera donc le suivant :

$$(26) \quad \frac{d\lambda}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{X}{T}, \quad \frac{d\mu}{ds} = -\frac{\beta}{R} - \frac{Y}{T}, \quad \frac{d\nu}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{Z}{T}.$$

285. Expressions des dérivées successives des coordonnées par rapport à l'arc. — Prenant l'arc s comme variable indépendante, on a d'abord, par les formules de Frenet,

$$x' = \alpha, \quad x'' = \alpha' = \frac{\lambda}{R}, \quad x''' = \frac{\lambda'}{R} - \frac{\lambda R'}{R^2} = -\left(\frac{\alpha}{R^2} + \lambda\frac{R'}{R^2} + \frac{X}{RT}\right).$$

Si l'on continue à dériver de proche en proche, en remplaçant chaque fois les dérivées de α, λ, X par leurs valeurs tirées des formules de Frenet, on trouvera un résultat de la forme suivante

$$x^{n} = \alpha P_1 + \lambda P_2 + X P_3,$$

où P_1, P_2 et P_3 sont des fonctions rationnelles de R, T et de leurs déri-

vées successives. Ces mêmes fonctions s'introduisent dans les valeurs de $y^{(n)}$ et de $z^{(n)}$, de sorte que l'on aura

$$y^{(n)} = \beta P_1 - \mu P_2 + Y P_3,$$
$$z^{(n)} = \gamma P_1 + \nu P_2 + Z P_3.$$

En particulier pour les trois premiers ordres, les valeurs de P_1, P_2 et P_3 se trouvent dans les expressions de x', x'' et x''' écrites ci-dessus.

Pour faire une application de ces formules, plaçons l'origine des coordonnées à l'origine des arcs, prenons les axes coordonnés suivant les directions principales, OX suivant la tangente, OY suivant la normale principale, OZ suivant la binormale au point O, et proposons nous de développer x, y et z suivant les puissances de s par la formule de Maclaurin. On aura, au point O, $\alpha_0 = \mu_0 = Z_0 = 1$ et les autres cosinus seront nuls.

Nous nous bornerons à calculer les trois premiers termes de la formule de Maclaurin. Le développement de x est le suivant :

$$x = x'_0 s + \frac{x''_0}{2} s^2 + \frac{x'''_0}{6} s^3 + \cdots$$

et ceux de y et z sont analogues. On a, dans le cas actuel,

$$x'_0 = 1, \qquad x''_0 = 0, \qquad x'''_0 = -\frac{1}{R^2};$$
$$y'_0 = 0, \qquad y''_0 = \frac{1}{R}, \qquad y'''_0 = -\frac{R'}{R^2};$$
$$z'_0 = 0, \qquad z''_0 = 0, \qquad z'''_0 = -\frac{1}{RT}.$$

On trouvera donc

$$(27) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= s - \frac{1}{6R^2} s^3 + \cdots \\ y &= \frac{s^2}{2R} - \frac{R'}{6R^2} s^3 + \cdots \\ z &= -\frac{s^3}{6RT} + \cdots \end{aligned} \right.$$

On déduit d'importantes conséquences de ces formules. Nous indiquerons seulement la suivante :

Une courbe traverse chacun de ses plans osculateurs en son point de contact.

En effet, sauf le cas où R ou bien T serait infini, la dernière équation montre que z change de signe avec s. A l'origine, le plan osculateur est celui des x, y ; la courbe passe donc d'un côté à l'autre de son plan osculateur. Le point M se mouvant sur la courbe dans le sens des arcs croissants, passe, par rapport au plan osculateur, du côté de la binormale si T est négatif, du côté opposé si T est positif.

EXERCICES.

1. Appliquer les formules générales à la courbe

$$y = x^2 : 2a, \qquad z = x^3 : 6a^2.$$

R. En choisissant convenablement le sens des arcs, on a

$$\frac{ds}{dx} = \frac{a+y}{a}.$$

Ensuite (ε désignant l'unité du même signe que a)

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{x} = \frac{\gamma}{y} = \frac{1}{a+y}, \quad \begin{cases} \lambda = -\varepsilon\beta, & \mu = \varepsilon(\alpha - \gamma), & \nu = \varepsilon\beta; \\ X = \varepsilon\gamma, & Y = -\varepsilon\beta, & Z = \varepsilon\alpha. \end{cases}$$

$$T = \varepsilon R = (a+y)^2 : a.$$

2. Même question pour la courbe

$$y = x^3 : 3a^2, \qquad z = a^2 : 2x.$$

R. On a, en choisissant convenablement le sens des arcs,

$$\frac{ds}{dx} = \frac{2x^4 + a^4}{2a^2x^2}.$$

Ensuite (ε désignant l'unité du même signe que x)

$$\frac{\alpha}{2a^2x^2} = \frac{\beta}{2x^4} = -\frac{\gamma}{a^4} = \frac{1}{2x^4 + a^4}; \quad \begin{cases} \lambda = -\varepsilon(\beta + \gamma), & \mu = -\varepsilon\alpha, & \nu = \varepsilon\alpha; \\ X = -\varepsilon\alpha, & Y = -\varepsilon\gamma, & Z = -\varepsilon\beta. \end{cases}$$

$$T = -\varepsilon R = -\frac{(2x^4 + a^4)^2}{8a^4x^3}.$$

3. *Hélice circulaire.* — Cette courbe est décrite par un point M qui se meut uniformément sur une droite, laquelle tourne elle-même d'un mouvement uniforme autour d'un axe. L'hélice est donc tracée sur un cylindre de révolution. Soient r le rayon de la section droite du cylindre et k une constante. Si l'on prend l'axe du cylindre pour axe des z et si l'on fait passer l'axe des y par un point de la courbe, les équations de l'hélice seront :

$$x = r\sin t, \qquad y = r\cos t, \qquad z = kt.$$

Nous compterons les arcs dans le sens où t croît, de sorte que nous aurons, h désignant une constante positive,

$$s' = \sqrt{r^2 + k^2} = h.$$

On a ensuite

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{y} = -\dfrac{\beta}{x} = \dfrac{\gamma}{k} = \dfrac{1}{h}, \\ \dfrac{\lambda}{x} = \dfrac{\mu}{y} = \dfrac{\nu}{0} = -\dfrac{1}{r}, \\ \dfrac{X}{ky} = -\dfrac{Y}{kx} = -\dfrac{Z}{r^2} = \dfrac{1}{hr}. \end{cases} \qquad \begin{cases} R = \dfrac{h^2}{r}, \\ T = \dfrac{h^2}{k}. \end{cases}$$

Donc, 1° les rayons de courbure et de torsion sont constants ; 2° la normale principale à l'hélice est en même temps normale au cylindre ; 3° la binormale fait un angle constant avec OZ ; 4° la torsion a le signe de k. Si les axes sont donnés comme d'habitude (n° 283), les spires, vues de l'extérieur du cylindre supposé vertical, paraissent monter de gauche à droite si k est positif (dextrorsum) et de droite à gauche si k est négatif (sinistrorsum).

Les coordonnées du centre de courbure M_1 sont :

$$x_1 = -x\left(\frac{k}{r}\right)^2, \qquad y_1 = -y\left(\frac{k}{r}\right)^2, \qquad z_1 = z.$$

Donc le lieu du centre de courbure est une nouvelle hélice. Le centre de courbure au point M_1 de cette nouvelle hélice est au point M. Les deux hélices décrites par M et M_1 sont réciproques au point de vue de la courbure : chacune d'elles est le lieu des centres de courbure de l'autre. Cette propriété est un cas particulier d'un théorème plus général (Exercice 6).

4. *Hélice quelconque.* — Une droite AB qui reste parallèle à OZ et dont le point A décrit une courbe PQ dans le plan XY engendre une surface cylindrique. Supposons que le point M se déplace avec une vitesse constante sur la droite AB, pendant que le point A se déplace avec une vitesse constante sur la courbe PQ ; le point M décrit sur la surface du cylindre une courbe que l'on appelle une *hélice*. Soit σ l'arc de la courbe PQ (section droite du cylindre). Les équations de l'hélice seront de la forme (k constant)

$$x = \varphi(\sigma), \qquad y = \psi(\sigma), \qquad z = k\sigma.$$

En déduire les propriétés suivantes : 1° L'arc s de l'hélice est proportionnel à celui σ de la section droite. 2° La tangente à l'hélice fait un angle constant avec la génératrice du cylindre. 3° La normale principale à l'hélice est normale au cylindre. 4° Les rayons de courbure de l'hélice et de la section droite sont proportionnels. 5° Les rayons de courbure et de torsion de l'hélice sont dans un rapport constant.

Montrer que, réciproquement : 1° toute courbe dont les tangentes font un angle constant avec une direction fixe ; 2° toute courbe dont les normales principales sont perpendiculaires à une direction fixe ; 3° toute courbe dont les rayons de courbure et de torsion sont dans un rapport constant, est une hélice.

5. Calculer les dérivées des coordonnées x_1, y_1, z_1 du centre de courbure M_1 d'une courbe gauche et celle de l'arc s_1 décrit par ce point.

R. On dérive les relations $x_1 - x = R\lambda, \ldots$ et l'on tient compte des formules de Frenet. On trouve

$$\left\{\begin{aligned} x_1' &= \lambda R' - X\frac{R}{T}s', \\ y_1' &= \mu R' - Y\frac{R}{T}s', \qquad \text{d'où} \qquad s_1'^2 = R'^2 + \frac{R^2}{T^2}s'^2. \\ z_1' &= \nu R' - Z\frac{R}{T}s', \end{aligned}\right.$$

6. *Courbes à courbure constante.* — Le lieu du centre de courbure M_1 d'une courbe gauche à courbure constante jouit de propriétés remarquables. On tire, dans ce cas, des équations de l'exercice précédent

$$\frac{x_1'}{X} = \frac{y_1'}{Y} = \frac{z_1'}{Z} = -\frac{R}{T}s' = s_1'.$$

En affectant de l'indice 1 les quantités qui se rapportent au lieu du point M_1, il vient

$$\alpha_1 = X, \qquad \beta_1 = Y, \qquad \gamma_1 = Z.$$

Donc la tangente au point M_1 est parallèle à la binormale au point M. On a ensuite les trois relations :

$$\alpha_1' = X', \qquad \beta_1' = Y', \qquad \gamma_1' = Z'.$$

On en tire d'abord

$$\alpha_1'^2 + \beta_1'^2 + \gamma_1'^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{s_1'^2}{R_1^2} = \frac{s'^2}{T^2} \quad \text{et} \quad R_1 = R;$$

ensuite, au moyen des formules de Frenet,

$$\lambda_1 = -\lambda, \qquad \mu_1 = -\mu, \qquad \nu_1 = -\nu.$$

On en conclut que le point M est le centre de courbure au point M_1 de la courbe décrite par ce centre de courbure. Donc les deux courbes considérées, la courbe génératrice et la courbe décrite par son centre de courbure, sont réciproquement les lieux des centres de courbure l'une de l'autre.

7. *Courbes sphériques.* — On appelle ainsi les courbes tracées sur une sphère. L'origine étant au centre, on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 = \text{const}.$$

En dérivant par rapport à s et en se servant des formules de Frenet, on en déduit, de proche en proche,

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \qquad \lambda x + \mu y + \nu z = -R, \qquad Xx + Yy + Zz = -R'T$$

d'où

$$x = -\lambda R - XTR', \qquad y = -\mu R - YTR', \qquad z = -\nu R - ZTR'.$$

Soit θ l'angle de la normale principale en M avec la normale inté-

rieure à la sphère, on conclut, sans peine, des formules précédentes : 1° que l'on a, les dérivées étant toujours prises par rapport à l'arc,

$$R = \rho \cos \theta, \qquad 1 : T = \pm\, \theta', \qquad R^2 + (TR')^2 = \rho^2\,;$$

2° que toute courbe sphérique à courbure constante est plane et qu'elle doit être, par conséquent, un cercle de la sphère.

8. Soit $s = MM'$ un arc infiniment petit d'une courbe gauche. Démontrer que la distance δ du point M' au plan osculateur en M, la plus courte distance δ' des tangentes en M et en M', la différence ε entre l'arc s et sa corde, ont respectivement pour expressions aux infiniment petits près du 4e ordre,

$$\delta = \frac{s^3}{6RT}, \qquad \delta' = \frac{s^3}{12RT}, \qquad \varepsilon = \frac{s^3}{24RT}.$$

R. Ce sont des conséquences faciles à tirer des formules (**27**) données au n° 285.

CHAPITRE IX

Calcul des aires, des arcs et des volumes. Evaluation approchée des intégrales définies.

---

§ 1. Quadrature des aires planes.

286. Quadrature des aires planes (coordonnées cartésiennes). — Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b) $(a < b)$. Considérons la courbe plane qui a pour équation

$$y = f(x),$$

par rapport à deux axes OX et OY se coupant sous un angle λ. Proposons-nous d'évaluer l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et les deux droites $x = a$ et $x = b$.

Nous supposerons, pour commencer, que $f(x)$ soit constamment positif dans l'intervalle (a, b). Alors le problème à résoudre est celui que nous avons déjà examiné au n° 201, mais en axes rectangulaires. La solution est analogue pour des axes quelconques. Décomposons l'aire en segments par des parallèles à l'axe des y d'abscisses successives $x_1 = a, x_2, x_3 \ldots x_i, \ldots x_{n+1} = b$ et soient, en général, M_i et m_i les limites supérieure et inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}) d'amplitude δ_i. L'aire du segment de base δ_i est intermédiaire entre celles des deux parallélogrammes de même base δ_i, l'un inscrit dans le segment et l'autre circonscrit. Ces parallélogrammes ont respectivement pour mesures $m_i\delta_i \sin\lambda$ et $M_i\delta_i \sin\lambda$. L'aire S à évaluer sera comprise entre les deux sommes :

$$\sin\lambda \sum_1^n m_i\delta_i \qquad \text{et} \qquad \sin\lambda \sum_1^n M_i\delta_i.$$

Elle a donc pour valeur la limite commune de ces deux sommes quand tous les δ_i tendent vers zéro. Il vient ainsi, par définition de l'intégrale définie,

(1) $$S = \sin\lambda \int_a^b f(x)dx$$

Si l'on suppose maintenant que $f(x)$ soit constamment négatif dans l'intervalle (a, b), le raisonnement précédent subsiste, sauf que toutes les mesures considérées sont négatives et la formule (**1**) donne pour S une valeur négative. Les aires calculées par cette formule sont donc positives quand la courbe est située au dessus de l'axe des x et négatives quand la courbe est située en dessous.

Enfin, si la courbe traverse une ou plusieurs fois l'axe OX, la formule fournit seulement la différence entre les aires situées de part et d'autre de cet axe. Dans ce cas, si l'on veut calculer l'aire totale, il faut donc évaluer séparément les aires positives et négatives et faire la somme de leurs valeurs absolues.

Lorsque les axes sont rectangulaires, $\sin \lambda = 1$. La formule se simplifie et prend la forme la plus habituelle

$$(2) \qquad S = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b y\, dx,$$

287. Les formules précédentes permettent d'évaluer l'aire comprise entre deux courbes. Supposons que ces courbes aient pour équations

$$y_1 = f_1(x), \qquad y_2 = f_2(x)$$

et que l'on ait constamment $f_1(x) < f_2(x)$. L'aire S comprise entre les deux courbes et les deux droites $x = a$ et $x = b$, sera la différence algébrique entre les deux aires S_2 et S_1 comprises entre ces deux droites et l'axe des x, mais limitées respectivement à chacune des deux courbes. On a donc $S = S_2 - S_1$. Si les axes sont rectangulaires, la formule (**2**) s'applique au calcul de S_2 et de S_1 et il vient

$$(3) \qquad S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Si les axes sont obliques, l'intégrale précédente doit être multipliée par $\sin \lambda$.

La formule (**3**) s'emploie pour calculer l'aire d'une courbe fermée, qui n'est rencontrée qu'en deux points par une parallèle à l'axe des y. Dans ce cas, l'équation de la courbe fournit pour y les deux valeurs $f_1(x)$ et $f_2(x)$ que l'on doit substituer dans la formule et l'on prend pour a et b les valeurs extrêmes de x sur la courbe.

288. Applications (**coordonnées cartésiennes**). — I *Parabole.* La para-

bole, rapportée à un diamètre OX et à la tangente à l'extrémité de ce diamètre, a pour équation $y^2 = 2px$, d'où

$$f(x) = \sqrt{2p}\,\sqrt{x}.$$

L'aire comprise, au dessus de l'axe OX, entre cet axe, la courbe et la corde d'abscisse x, sera donc

$$S = \sqrt{2p}\,\sin\lambda \int_0^x \sqrt{x}\,dx = \sqrt{2p}\,\sin\lambda\,\frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}xy\sin\lambda.$$

Cette aire vaut donc les deux tiers du parallélogramme construit sur les deux côtés rectilignes x et y de l'aire considérée. La relation analogue existe entre les aires correspondantes situées en dessous de l'axe OX. Donc *le segment détaché de la parabole par une corde quelconque est égal aux deux tiers du parallélogramme construit sur sa corde et sur sa flèche* (portion du diamètre conjugué intérieure au segment).

II. *Cercle.* L'équation d'un cercle en coordonnées rectangulaires est

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Le segment situé au dessus du diamètre OX entre les cordes $x = 0$ et $x = x$, a donc pour valeur

$$S = \int_0^x dx\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\,\text{arc sin}\,\frac{x}{a},$$

ainsi qu'il résulte de la valeur de l'intégrale indéfinie, calculée au nº 165.

Si $x = a$, on obtient l'aire du quart de cercle $\pi a^2 : 4$. Donc l'aire du cercle entier est πa^2.

III *Ellipse.* L'ellipse étant rapportée à ses axes, son équation se ramène à la forme

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Le segment situé au dessus de l'axe OX entre les cordes $x = 0$ et $x = x$, s'obtient en multipliant par $b : a$ l'aire que nous venons d'obtenir pour le cercle. Donc l'aire de l'ellipse entière sera πab.

IV *Hyperbole.* L'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes est de la forme

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

L'aire S comprise (fig. 10) entre l'arc de courbe AM, l'axe horizontal OX et la verticale MP d'abscisse x ($x > a$) a pour valeur

$$S = \frac{b}{a}\int_a^x dx\sqrt{x^2 - a^2}.$$

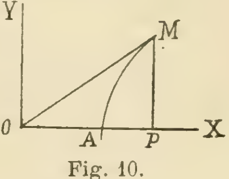


Fig. 10.

Calculons d'abord l'intégrale indéfinie. Une intégration par parties donne

$$\int dx\sqrt{x^2 - a^2} = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Si l'on remplace x^2dx par $(x^2 - a^2)\,dx + a^2dx$, la dernière intégrale se décompose en deux autres dont celle du premier membre. On en conclut

$$2\int dx\sqrt{x^2 - a^2} = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\int dx\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\,\text{Log}\,(x + \sqrt{x^2 - a^2}).$$

De là résulte facilement la valeur de S

$$S = \frac{b}{2a}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{ab}{2}\,\text{Log}\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

et, en se servant de l'équation de la courbe,

$$S = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\,\text{Log}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Le premier terme de S mesure l'aire du triangle OPM (fig. 10). Donc le second terme, pris en valeur absolue, mesure l'aire du secteur OAM (secteur hyperbolique).

Si l'hyperbole est rapportée à ses asymptotes, son équation est $xy = k^2$. L'aire comprise entre la courbe, l'asymptote OX et deux parallèles à l'autre asymptote d'abscisses x_0 et x, a pour mesure (λ étant l'angle des asymptotes)

$$S = \sin\lambda\int_{x_0}^x \frac{k^2}{x}\,dx = k^2\sin\lambda\,\text{Log}\,\frac{x}{x_0}.$$

C'est cette propriété des logarithmes néperiens qui leur a fait donner le nom de logarithmes hyperboliques.

On remarquera que l'aire S augmente indéfiniment quand x tend vers l'infini ou quand x_0 tend vers 0. La portion du plan comprise entre une branche de la courbe et ses asymptotes a donc une aire illimitée.

IV *Cycloïde.* Si l'on prend pour variable d'intégration l'angle t (n° 240), on aura

$$ydx = a^2 (1 - \cos t)^2 \, dt.$$

L'aire S de la cycloïde, comptée depuis l'origine où $t = 0$ jusqu'à l'ordonnée qui répond à l'angle t, aura pour mesure

$$S = a^2 \int_0^t (1 - \cos t)^2 \, dt = a^2 \left(\frac{3t}{2} - \sin t + \frac{\sin t \cos t}{2} \right)$$

Retranchons cette aire OMP (fig. 11) de celle du rectangle OPFG qui a pour valeur $2ax = 2a^2 (t - \sin t)$, le reste, c'est-à-dire l'aire OMFG sera égale à

$$\frac{a^2}{2} \left(t - \sin t \cos t \right),$$

ce qui est précisément l'aire du segment AMQ déterminé, dans le cercle générateur, par la perpendiculaire MQ sur le diamètre AB. On a donc

Fig. 11.

$$\text{surf. OMFG} = \text{surf. AMQ}.$$

A l'extrémité de l'arcade, $t = 2\pi$ et $S = 3\pi a^2$. Donc *l'aire totale entre une arcade de cycloïde et sa base est triple de l'aire du cercle générateur.*

289. Quadrature des secteurs (coordonnées polaires). — Considérons une courbe plane ayant pour équation en coordonnées polaires

$$r = f(\theta),$$

et supposons que $f(\theta)$ soit une fonction continue de θ entre θ_1 et Θ ($\Theta > \theta_1$).

Proposons-nous d'évaluer l'aire du secteur compris entre un arc de la courbe et les deux rayons vecteurs d'inclinaisons θ_1 et Θ. Pour cela, nous décomposerons cette aire en secteurs élémentaires par des rayons vecteurs intermédiaires d'inclinaisons successives $\theta_2, \ldots \theta_i, \ldots, \theta_n$ et soit $\theta_{n+1} = \Theta$. L'aire d'un secteur quelconque, limité par deux rayons consécutifs d'inclinaisons θ_i et θ_{i+1}, est comprise entre celles des deux secteurs circulaires de même ouverture $(\theta_{i+1} - \theta_i)$ mais ayant respectivement pour rayons le minimum m_i et le maximum M_i de $f(\theta)$ dans l'intervalle (θ_i, θ_{i+1}). Ces deux secteurs circulaires ont respectivement pour mesures $\frac{1}{2} m_i^2 (\theta_{i+1} - \theta_i)$ et $\frac{1}{2} M_i^2 (\theta_{i+1} - \theta_i)$. Donc le secteur entier de la courbe sera compris entre les deux sommes :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i^2 (\theta_{i+1} - \theta_i), \qquad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} M_i^2 (\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Si l'on multiplie indéfiniment le nombre des secteurs élémentaires, de manière à faire tendre vers zéro toutes leurs ouvertures $(\theta_{i+1}-\theta_i)$, ces deux sommes tendent vers une limite commune qui sera la valeur de S. Cette limite est une intégrale définie ; on a donc

$$(4) \qquad S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\Theta} f(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\Theta} r^2 d\theta.$$

Remarque I. On peut appliquer la formule (4) à des courbes qui décrivent plusieurs spires autour du pôle. Dans ce cas, l'intervalle d'intégration peut croître au delà de quatre angles droits et la formule représente l'aire totale balayée par le rayon vecteur quand il tourne dans le même sens de θ à Θ. Donc, quand le rayon tourne de plus d'un tour, les aires décrites se recouvrent l'une l'autre.

Remarque II. On peut transformer la formule (4) de manière à la rendre immédiatement applicable au cas des coordonnées cartésiennes. On a, en effet,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

d'où

$$x\,dy - y\,dx = r^2 d\theta$$

Supposons que x et y soient exprimés en fonction d'une variable t qui varie de t_1 à t_2 quand le point (x, y) décrit l'arc qui limite le secteur. En prenant t comme variable la formule (4) se transformera dans la suivante :

$$(5) \qquad S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{x\,dy - y\,dx}{dt}\,dt.$$

290. Applications (Coordonnées polaires). — I. *Spirale d'Archimède* : $r = a\theta$. L'aire S depuis l'origine jusqu'au rayon vecteur r a pour mesure

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\theta} r^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\theta} \theta^2 d\theta = \frac{a^2\theta^3}{6} = \frac{r^3}{6a}.$$

Si l'on fait $\theta = 2\pi$, on obtient l'aire entourée par la première spire, savoir $\frac{4}{3}\pi^3 a^2$.

II. *Spirale logarithmique* : $r = ae^{m\theta}$. Cette courbe décrit une infinité de spires autour de l'origine. Cherchons l'aire du secteur S com-

pris entre un arc de la courbe et les deux rayons vecteurs r_1 et R d'inclinaisons θ_1 et Θ. On aura

$$S = \frac{a^2}{2}\int_{\theta_1}^{\Theta} e^{2m\theta}d\theta = \frac{a^2}{4m}\left(e^{2m\Theta} - e^{2m\,\theta_1}\right) = \frac{R^2 - r_1^2}{4m}.$$

Si l'on fait tendre θ_1 vers $-\infty$, r_1 tend vers zéro et S vers $R^2 : 4m$. On obtient ainsi la limite de la somme des aires entourées par un nombre illimité de spires qui se rapprochent indéfiniment du pôle.

III. *Lemniscate* : $r^2 = a^2 \cos 2\,\theta$. Cette courbe se compose de deux feuilles symétriques. L'aire du secteur compris entre l'axe polaire et le rayon d'inclinaison θ sera

$$S = \frac{a^2}{2}\int_{o}^{\theta} \cos 2\theta \, d\theta = \frac{a^2}{4}\sin 2\theta.$$

Si l'on fait $\theta = \pi : 4$, on obtient l'aire $a^2 : 4$ d'une demi-feuille. L'aire totale de la courbe est a^2.

291. Aire limitée par une courbe fermée. Notion des intégrales curvilignes. — On appelle *contour fermé simple* un contour fermé qui ne se coupe pas lui-même. Un tel contour enferme une aire que l'on peut se proposer d'évaluer.

Nous savons déjà calculer cette aire lorsque le contour se réduit au quadrilatère curviligne envisagé au n° 287. Ce contour se compose de deux parallèles à l'axe des y d'abscisses a et b et de deux courbes A_1B_1 et A_2B_2 qui ferment le quadrilatère, et qui ont pour équations dans l'intervalle (a, b)

$$y_1 = f_1(x), \qquad y_2 = f_2(x), \qquad y_1 < y_2.$$

L'aire intérieure au contour a, dans ce cas, pour valeur (n° 287)

$$S = \int_a^b y_2 dx - \int_a^b y_1 dx. \tag{6}$$

Ces deux intégrales ont la même forme $\int y dx$ et, pour achever de les déterminer, il suffit de faire connaître les arcs A_2B_2 et A_1B_1 que parcourt le point (x, y) pendant l'intégration et le sens dans lequel se fait le parcours. Nous dirons donc que ces deux intégrales sont des intégrales curvilignes [1] et nous les représenterons par les notations

$$\int_{A_2B_2} y dx, \qquad \int_{A_1B_1} y dx.$$

[1] Les intégrales curvilignes sont présentées ici au point de vue le plus élémentaire. Leur définition générale sera donnée au § 3.

Cette notation désigne l'arc par ses extrémités ; on écrit d'abord le point de départ, ce qui fait connaître le sens du parcours. Renverser ce sens revient à intervertir les limites a et b dans les intégrales et, par conséquent, à changer leur signe. L'équation (6) peut donc s'écrire maintenant

$$(7) \quad S = \int_{A_2B_2} ydx - \int_{A_1B_1} ydx = \int_{A_2B_2} ydx + \int_{B_1A_1} ydx.$$

Un contour fermé peut être parcouru dans deux sens différents. On appelle *sens direct* celui qui laisse à gauche l'intérieur de l'aire. L'autre est le sens *rétrograde*, Donc, dans les dernières intégrales, les arcs A_2B_2 et B_1A_1 sont parcourus dans le sens rétrograde.

Considérons maintenant un contour simple C, formé d'un nombre limité d'arcs successifs sur chacun desquels x varie toujours dans le même sens quand on décrit le contour. Ce cas est évidemment très général. Appelons *intégrale effectuée sur le contour* et désignons par

$$\int_{C} ydx$$

la somme des intégrales curvilignes effectuées successivement *dans le sens direct* sur chacun des arcs successifs qui composent le contour. Je dis que l'aire S intérieure au contour aura pour mesure

$$(8) \qquad S = -\int_{C} ydx$$

En effet, en menant des parallèles à l'axe des y, on peut décomposer l'aire S en morceaux, dont les frontières respectives n'empruntent que deux arcs distincts du contour C et qu'on peut, par conséquent, évaluer par la formule (7). L'aire de chaque morceau se mesure par la somme des intégrales effectuées dans le sens rétrograde sur les deux portions du contour C qui lui servent de frontières. Faisons la somme de ces aires ; nous obtiendrons l'intégrale effectuée dans le sens rétrograde sur tout le contour, c'est-à-dire la formule (8).

Remarque I. Le contour C peut aussi comprendre des portions de droites. Il n'y a de remarque à faire que pour celles qui seraient parallèles à l'axe des y. Dans ce cas, comme elles n'interviennent pas dans l'évaluation des morceaux, elles ne doivent pas intervenir non plus dans l'évaluation de l'aire totale. Cependant, si l'on attribue la valeur 0 à l'intégrale effectuée sur ces lignes (ce qui est naturel, x étant constant et dx nul), on peut étendre l'intégration à tout le contour et considérer la formule (8) comme générale.

Remarque II. La formule (**8**) sera d'une application immédiate si x et y sont exprimés en fonctions continues d'une variable auxiliaire t et admettent des dérivées continues par rapport à t. Supposons, en effet, que le point (x, y) décrive tout le contour C dans le sens rétrograde quand t varie de t_1 à T. Prenons t comme variable ; l'aire S intérieure au contour C s'évaluera par la formule

$$(9) \qquad S = \int_{t_1}^{T} y \frac{dx}{dt} dt.$$

Remarque III. Nous avons établi la formule (**8**) en considérant y comme fonction de x. On peut établir une formule analogue en considérant x comme fonction de y. Mais il faut supposer des conditions correspondantes. Cette formule sera

$$(10) \qquad S = \int_C x dy,$$

car le contour doit être parcouru dans le sens direct pour que l'intégrale soit positive.

La combinaison des formules (**8**) et (**10**) donne encore une formule, souvent employée,

$$S = \frac{1}{2}\int_C x dy - \frac{1}{2}\int_C y dx,$$

que l'on écrit plus simplement

$$(11) \qquad S = \frac{1}{2}\int_C (x dy - y dx).$$

Ces nouvelles formules s'appliquent avantageusement comme la formule (**8**), au cas où la courbe est donnée par une représentation paramétrique. [1]

292. Application. — *Une corde de longueur constante c + c' se meut d'un mouvement continu en appuyant ses extrémités sur une courbe fermée donnée C. L'aire comprise entre la courbe et le lieu du point* M *qui partage la corde en deux segments* c *et* c', *a pour mesure* $\pi cc'$, *quelle que soit la courbe donnée.*

Désignons par K la courbe décrite par M et supposons que cette courbe forme un contour simple. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les coordonnées variables des extrémités de la corde ; celles du point M seront

$$x = \frac{cx_1 + c'x_2}{c + c'}, \qquad y = \frac{cy_1 + c'y_2}{c + c'}.$$

[1] Les démonstrations les plus générales des formules (**8**), (**10**) et (**11**) seront données au § 3.

Imaginons que les coordonnées soient exprimées en fonction d'un paramètre t qui varie de t_1 à T quand les extrémités de la corde décrivent la courbe C. Prenons t comme variable. Les aires S et Σ intérieures aux courbes C et K pourront s'évaluer par les intégrales :

$$S = \int_{t_1}^{T} y_1 dx_1 = \int_{t_1}^{T} y_2\, dx_2 = \int_{t_1}^{T} \frac{(c^2 + cc')\, y_1 dx_1 + (cc' + c'^2)\, y_2 dx_2}{(c + c')^2}.$$

$$\Sigma = \int_{t_1}^{T} y dx = \int_{t_1}^{T} \frac{(cy_1 + c'y_2)\,(cdx_1 + c'dx_2)}{(c + c')^2},$$

où l'on suppose les x et les y exprimés en fonction de t. On en déduit par soustraction

$$S - \Sigma = \frac{cc'}{(c + c')^2} \int_{t_1}^{T} (y_2 - y_1)\,(dx_2 - dx_1).$$

Menons à partir de l'origine une droite égale et parallèle à la corde. Les coordonnées de l'extrémité seront $\eta = y_2 - y_1$ et $\xi = x_2 - x_1$. Or cette extrémité décrit un cercle de rayon $(c + c')$. L'intégrale qui figure dans la dernière équation n'est autre chose que l'intégrale de $\eta d\xi$ effectuée sur ce cercle. Donc elle mesure l'aire du cercle et sa valeur est $\pi\,(c + c')^2$. Il vient donc

$$S - \Sigma = \pi cc'.$$

Si les courbes C et K ne se coupent pas, le théorème est donc démontré. Si elles se coupent, il reste vrai, à condition d'attribuer des signes contraires aux aires situées de part et d'autre de la courbe C. Mais le théorème tomberait en défaut si le lieu du point M ne constituait pas un contour simple. Le théorème suppose encore les courbes C et K soumises aux conditions que nous avons indiquées au n° précédent pour que les formules soient légitimes.

Exercices.

1. Aire de la *chainette*, comptée de l'axe de la courbe.

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad S = \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

2. Aire de la *cissoïde* : $y^2 = x^3 : (2a - x)$.

$$S = \int_0^x \frac{x^2\, dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = 8a^2 \int_{\sqrt{\frac{2a-x}{x}}} \frac{dt}{(1 + t^2)^3}.$$

Ces intégrales ont été étudiées n°s 185 et 219.

Si l'on fait $x = 2a$, on trouve $S = 3\pi a^2 : 2$. Doublant cette valeur, on trouve $3\pi a^2$ pour l'espace indéfini compris entre la cissoïde et son asymptote $x = 2a$. C'est le triple de l'aire du cercle de rayon a.

3. Aire du *limaçon de Pascal* : $r = a \cos \theta + b$.

4. Aire de la *conchoïde* : $r = a \sec \theta + b$,

5. Aire de *l'épicycloïde*. — On a indiqué (p. 237, exercice 4) les équations de l'épicycloïde engendrée par le roulement d'un cercle de rayon b sur un cercle de rayon a. Dans ces équations, le paramètre t désigne l'angle dont le point de contact a tourné sur le cercle fixe. On peut aussi prendre comme paramètre l'angle θ dont ce point a tourné sur le cercle mobile. On a $at = b\theta$. En posant $b : a = q$, les équations de l'épicycloïde s'écriront

$$\frac{x}{a} = (1+q) \cos q\theta - q \cos (1+q)\theta, \qquad \frac{y}{a} = (1+q) \sin q\theta - q \sin (1+q)\theta.$$

L'aire d'un secteur se détermine alors par la formule (5) du n° 289 ; on trouve

$$S = \frac{1}{2} a^2 q (1+q)(1+2q) \int_0^\theta (1 + \cos \theta) d\theta = \frac{b}{2a} (a^2 + 3ab + 2b^2)(\theta + \sin \theta)$$

Si $\theta = 2\pi$, on obtient l'aire du secteur limité par une arcade entière de la courbe. Pour obtenir l'aire de l'arcade elle-même, il faut encore retrancher l'aire d'un secteur du cercle fixe dont l'arc est $2\pi b$; il restera

$$\frac{\pi b^2}{a} (3a + 2b)$$

6. *Hypocycloïde*. — Les équations de l'hypocycloïde s'obtiennent en remplaçant dans les précédentes q par $-q$. Problèmes analogues aux précédents.

7. *Courbes unicursales*. — Les coordonnées x et y d'une courbe unicursale peuvent s'exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre t. Donc la quadrature de ces courbes dépend d'une intégrale rationnelle et peut toujours se faire sous forme finie. Dans le cas particulier examiné au n° 181 où le paramètre t est égal à $y : x$, on a $xy' - yx' = x^2$. L'aire d'un secteur se calculera par la formule (5) du n° 289, qui prendra la forme simple

$$S = \frac{1}{2} \int x^2 dt.$$

Appliquer cette formule aux cubiques unicursales suivantes :

$x(x^2 + y^2) = 2ay$ (cissoïde),
$(x + a)(x^2 + y^2) = 3ay^2$ (strophoïde),
$x^3 + y^3 = 3axy$ (Folium de Descarte).

§ 2. Rectification des courbes.

293. **Courbes rectifiables. Rectification des courbes planes.** — La longueur d'un arc de courbe entre deux points extrêmes est, par

définition (nos 244 et 264), la limite du périmètre d'un polygone inscrit dans la courbe et dont tous les côtés tendent vers zéro. Cette limite n'existe pas toujours et l'on appelle *rectifiables* les courbes dont l'arc a une longueur déterminée. Nous renverrons au paragraphe suivant pour l'étude des caractères les plus généraux des courbes rectifiables et nous nous bornerons ici aux conditions sur lesquelles nous avons fait reposer les formules des nos 244 et suivants.

Considérons d'abord une courbe plane, ayant pour équation

$$y = f(x);$$

la longueur de son arc depuis un point fixe M_0 d'abscisse x_0 jusqu'au point variable M d'abscisse x, s'évalue par la formule (n° 245)

$$(1) \qquad s = \int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1+y'^2}.$$

Les formules de rectification qui conviennent aux autres formes d'équations s'obtiennent en changeant de variable dans l'intégrale définie

$$s = \int_0^s ds.$$

Dans le cas d'une représentation paramétrique, on prend t comme variable ; on sait (n° 245) que $ds = dt\sqrt{x'^2+y'^2}$. Donc, t_0 et t désignant les paramètres des extrémités, l'arc aura pour mesure

$$(2) \qquad s = \int_{t_0}^{t} dt\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

Dans le cas des coordonnées polaires, $ds = \sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}$. Soient (r_0, θ_0), (r, θ) les extrémités de l'arc à mesurer. Il vient, suivant qu'on prend θ ou r comme variable,

$$(3) \qquad s = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \int_{r_0}^{r} dr\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}.$$

294. Exemples de rectifications (coordonnées rectangulaires). — I. *Chaînette.* On a, dans ce cas (n° 259),

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \qquad \sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Calculons l'arc à partir du sommet A où $x = 0$, la formule (1) donne

$$s = \frac{1}{2}\int_0^x\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

II. *Parabole.* Prenons l'axe de symétrie pour axe des y et le sommet pour origine. On aura

$$x^2 = 2py, \qquad y = \frac{x^2}{2p}, \qquad 1 + y'^2 = \frac{x^2 + p^2}{p^2}.$$

Donc l'arc, compté à partir du sommet, a pour mesure

$$s = \frac{1}{p}\int_0^x dx\sqrt{x^2 + p^2}\cdot$$

En remplaçant a^2 par $-p^2$ dans l'intégrale indéfinie, calculée au n° 288 à l'occasion de l'aire de l'hyperbole, il vient

$$\int dx\sqrt{x^2 + p^2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p^2}{2}\,\text{Log}\,(x + \sqrt{x^2 + p^2}).$$

De là la valeur de s

$$s = \frac{x}{2p}\sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p}{2}\,\text{Log}\,\frac{x + \sqrt{x^2 + p^2}}{p}.$$

III. *Cycloïde.* Considérons la représentation paramétrique habituelle

$$x = a\,(t - \sin t), \qquad y = a\,(1 - \cos t).$$

L'arc, compté à partir de l'origine où $t = 0$, a pour mesure

$$s = a\int_0^t dt\,\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2a\int_0^t \sin\frac{t}{2}\,dt = 4a\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right)\cdot$$

295. Intégrales elliptiques de Legendre. Rectifications de l'ellipse et de l'hyperbole. — L'arc de ces deux courbes s'exprime par des intégrales que l'on ne peut pas réduire aux fonctions élémentaires, mais on peut les ramener aux deux intégrales définies suivantes :

$$\text{F}\,(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad \text{E}\,(k, \varphi) = \int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\cdot$$

où le paramètre k est < 1. Legendre a donné à ces intégrales le nom d'*intégrales elliptiques* de *première* et de *seconde espèce*. On a dressé des tables qui permettent de les calculer pour les diverses valeurs de φ et de k.

Les intégrales sont dites *complètes*, si $\varphi = \frac{\pi}{2}$; elles se désignent par

$$\text{F}_1\,(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad \text{E}_1\,(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

Arc d'ellipse. Soit la représentation paramétrique

$$x = a \sin \varphi, \qquad y = b \cos \varphi.$$

L'arc BM, compté à partir du sommet B du petit axe où $\varphi = 0$, a pour mesure

$$s = \int_0^\varphi d\varphi \sqrt{x'^2 + y'^2} = \int_0^\varphi d\varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$$

L'arc d'ellipse dépend de l'intégrale elliptique de seconde espèce. Posons, en effet, $k^2 = (a^2 - b^2) : a^2$; il vient

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = a \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

d'où $s = a\,E(k, \varphi)$.

Si $\varphi = \pi : 2$, l'intégrale est complète et l'arc égal au quart du périmètre de l'ellipse. Le périmètre total sera donc $4a\,E_1(k)$.

Arc d'hyperbole. On peut prendre comme représentation paramétrique de l'hyperbole rapportée à ses axes, le système

$$x = \frac{a}{\sin \varphi}, \qquad y = b \cot \varphi,$$

car, en éliminant φ, on retrouve l'équation classique de la courbe. L'arc AM, compté du sommet, où $\varphi = \frac{\pi}{2}$, jusqu'à un point M où φ est $< \frac{\pi}{2}$, a pour mesure

$$s = \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{x'^2 + y'^2} = \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2}.$$

Une intégration par parties et une décomposition donnent facilement

$$s = \cot \varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2} - \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2}} =$$

$$\cot \varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2} - \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2} + b^2 \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2}}.$$

Posons $k^2 = a^2 : (a^2 + b^2)$, d'où

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2} = \frac{a}{k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, ;$$

l'arc s dépend des intégrales elliptiques par la formule

$$s = \cot \varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2} - \frac{a}{k} [E_1(k) - E(k, \varphi)] + \frac{kb^2}{a} [F_1(k) - F(k, \varphi)].$$

296. Exemples de rectifications en coordonées polaires. — I. ***Spirale***

logarithmique : $r = ae^{m\theta}$. Prenons r comme variable ; nous aurons $m\theta = \operatorname{Log} r - \operatorname{Log} a$, d'où

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = \frac{1+m^2}{m^2} dr^2$$

$$s = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} \int_{r_0}^{r} dr = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} (r - r_0).$$

Donc *l'arc de la spirale logarithmique varie proportionnellement au rayon vecteur*. Le pôle est un point asymptotique de la courbe, car r ne s'annule qu'en faisant tendre θ vers $-\infty$. L'arc-limite, compté de ce point, conserve néanmoins une valeur finie

$$s = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} r.$$

II. *Spirale d'Archimède* : $r = a\theta$. L'arc compté à partir du pôle a pour valeur, en intégrant par rapport à r,

$$s = \int_0^r dr \sqrt{1 + r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2}} = \frac{1}{a} \int_0^r dr \sqrt{a^2 + r^2}.$$

C'est la même intégrale que celle à laquelle conduit l'évaluation de l'arc de la parabole. Donc les arcs de la parabole $x^2 = 2ay$ et de la spirale $r = a\theta$ ont même longueur, quand on compte le premier entre les abscisses 0 et x et le second entre les rayons 0 et $r = x$.

III *Lemniscate* : $r^2 = a^2 \cos 2\theta$. Si l'on prend r comme variable, on a

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \cos \frac{r^2}{a^2}, \quad \frac{d\theta}{dr} = -\frac{r}{\sqrt{a^4 - r^4}}.$$

L'arc compté à partir du sommet, où $r = a$, a donc pour mesure

$$s = \int_r^a dr \sqrt{1 + \left(r \frac{d\theta}{dr}\right)^2} = a^2 \int_r^a \frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}.$$

Cette intégrale se ramène à l'*intégrale elliptique de première espèce* (nº 295) en posant $r = a \cos \varphi$; il vient ainsi

$$s = a \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^4 \varphi}} = a \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Donc $s = \dfrac{a}{\sqrt{2}} F\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right)$.

297. Rectification des courbes gauches. Exemple. — Lorsque les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de la courbe sont

considérées comme fonctions de t, la longueur de l'arc AB, compris entre les points dont les paramètres sont a et b, a pour mesure

$$s = \int_a^b dt \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Comme exemple, considérons l'intersection des deux cylindres :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right).$$

Prenons x comme variable. On tire de la première équation

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \qquad y' = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

et de la seconde

$$z = a \operatorname{Log}\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}, \qquad z' = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Comptons l'arc à partir du point où $x = a$; il viendra

$$s = \int_a^x dx \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}\int_a^x \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Exercices.

1. *Epicycloïdes.* — Les équations de l'épicycloïde sont (Exercice 5, p. 298) :

$$\frac{x}{a} = (1 + q)\cos q\theta - q\cos(1 + q)\theta, \quad \frac{y}{a} = (1 + q)\sin q\theta - q\sin(1 + q)\theta.$$

On en tire

$$\frac{ds}{a} = 2q(1 + q)\sin\frac{\theta}{2}.$$

L'arc compté à partir du point de rebroussement où $\theta = 0$, sera

$$\frac{s}{a} = 2q(1 + q)\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right).$$

Toutefois, comme l'élément ds doit être positif, cette formule n'est applicable que si θ varie de 0 à 2π. Si $\theta = 2\pi$, on obtient le périmètre d'une arcade entière

$$s = 4aq(1 + q) = \frac{4b}{a}(a + b).$$

L'arc d'épicycloïde s'exprime algébriquement en fonction du rayon vecteur r. On a, en effet,

$$r^2 = x^2 + y^2 = (1 + 2q)^2 - 4q(1 + q)\cos^2\frac{\theta}{2}$$

d'où l'on tire $\cos\frac{\theta}{2}$ et, par suite s en fonction de r.

En changeant q en — q dans les formules précédentes, on obtient des résultats correspondants pour l'*hypocycloïde*.

Les rectifications de la *cardioïde* (Exercice 6, p, 237) et de l'*astroïde* (Exercice 3, p. 255) sont des cas particuliers des précédentes.

2. *Cissoïde* (Exercice 2, p. 236).

$$r = 2a\,(\sec\theta - \cos\theta)$$

R. L'arc compté à partir du pôle a pour valeur

$$s = 2a\int_0^\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta\, \sqrt{\operatorname{tg}^2\theta + 4} = 2a\int_2^{\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta + 4}} \frac{t^2 dt}{t^2 - 3}$$

Intégration facile.

3. *Courbes gauches.* — Arcs des deux courbes suivantes :

$$y = \frac{x^2}{2a}, \quad z = \frac{x^3}{6a^2} \qquad \text{et} \qquad x = a \sin\frac{y}{a}, \quad z = \frac{a}{4}\operatorname{Log}\frac{a+x}{a-x}.$$

R. L'arc compté de l'origine a pour valeur $s = x + z$ pour les deux courbes.

§ 3. Définitions analytiques les plus générales des courbes continues, fermées, rectifiables, quarrables. Fonctions à variation bornée. Intégrales curvilignes.

298. Fonctions à variation bornée. — Soient $y = f(x)$ une fonction de x bornée dans l'intervalle (a, b) et X un point de cette intervalle. Donnons à x une suite de valeurs croissantes $x_1 = a$, $x_2, \ldots x_n$, $x_{n+1} = X$; soient y_1, $y_2, \ldots y_{n+1} = Y$ les valeurs correspondantes de y ; faisons la somme des différences successives de y ; il viendra

$$(1) \qquad \sum_1^n (y_{k+1} - y_k) = Y - y_1 = p - n,$$

p désignant la somme des différences positives et — n celle des différences négatives. Désignons encore par t la somme des différences absolues ; nous aurons

$$(2) \qquad t = \sum_1^n |\, y_{k+1} - y_k \,| = p + n.$$

Les valeurs extrêmes a et X restant fixes, les trois sommes p, n, t dépendent encore du nombre et de la position des valeurs intermédiaires. Faisons varier ces deux éléments de toutes les manières possibles; si l'une des trois sommes est bornée, les deux autres sommes le seront aussi, en vertu des équations (1) et (2). Quand il en sera ainsi, nous dirons que y est une fonction à variation bornée entre a et X. (C. Jordan.)

Dans cette hypothèse, on peut choisir successivement les points intermédiaires de manière que p s'approche indéfiniment de sa limite supé-

rieure P. Les équations (1) et (2) montrent que n et t tendront en même temps vers leurs limites supérieures N et T et ces équations elles-mêmes deviendront, à la limite,

$$Y - y_1 = P - N, \qquad T = P + N.$$

Nous allons faire connaître maintenant quelques propriétés importantes des sommes p, n, t et de leurs limites supérieures P, N et T.

1° *Si l'on ajoute une nouvelle valeur intermédiaire* ξ *entre* x_k *et* x_{k+1}, *la somme* t *peut augmenter mais non décroître ; elle augmente d'ailleurs au maximum du double de l'oscillation de* y *dans l'intervalle* (x_k, x_{k+1}).

Soit η la valeur de y au point ξ ; l'adjonction de ce point remplace dans t le terme unique $| y_{k+1} - y_k |$ par deux autres, dont la somme est au moins égale, $| y_{k+1} - \eta | + | \eta - y_k |$. D'autre part, chacun de ces nouveaux termes est au plus égal à l'oscillation de y entre x_k et x_{k+1}. Donc t ne peut croître de plus du double de cette limite.

2° *Si* y *est continue, les sommes* p, n, t *ont respectivement* P, N *et* T *pour limites quand les valeurs intermédiaires de* x *se rapprochent indéfiniment les unes des autres.*

Le théorème vrai pour une des trois sommes le sera pour les deux autres. Démontrons-le pour t seulement.

Pour cela, il faut montrer que la somme t relative à un système S de points intermédiaires surpasse $T - 2\varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif donné 2ε, pourvu que les intervalles de ces points soient assez petits.

On peut d'abord, par définition de T, trouver un système de points S' tel que la somme correspondante t' vérifie la condition $t' > T - \varepsilon$. Soit ν le nombre des points de S'. Je dis que le système de points S fournira une somme $t > T - 2\varepsilon$, pourvu que ses intervalles soient tous inférieurs à $\varepsilon : 2\nu$.

Considérons, en effet, un troisième système de points S'', formé de la réunion de ceux de S et S'', et soit t'' la somme correspondante. Comme il faut ajouter ν points au plus pour passer de S à S'', il faut ν accroissements au plus, tous moindres que $\varepsilon : \nu$ (propriété 1°), pour passer de t à t'', On a donc $t + \varepsilon > t''$. Mais, d'autre part, S'' se forme aussi par l'adjonction de nouveaux points à S'. Donc $t'' > t'$ et *a fortiori* $t'' > T - \varepsilon$. Nous obtenons donc l'inégalité à démontrer $t + \varepsilon > T - \varepsilon$.

3° *Si la fonction* y *est à variation bornée dans l'intervalle* (a, b), *elle est de même nature dans toute portion* (a, X) *de cet intervalle et les quantités* P, N, T *sont des fonctions stationnaires ou croissantes de* X.

Donnons à x une suite de valeurs intermédiaires entre a et b et prenons X au nombre de ces valeurs. Considérons la suite des valeurs correspondantes de y. La somme des différences absolues de ces valeurs

entre a et X sera moindre que la somme analogue entre a et b. Donc, si cette dernière a une limite, la première en a une aussi et y est à variation bornée dans l'intervalle (a, X). Le même raisonnement prouve que T, qui est la limite de la somme précédente, ne peut pas diminuer quand X augmente. La démonstration est analogue pour P et N.

4° *Si la fonction à variation bornée y est, en outre, continue dans l'intervalle* (a, b), P, N *et* T *sont aussi fonctions continues de* X *dans le même intervalle.*

Il suffit de prouver le théorème pour T.

Considérons le système de valeurs : $x_1 = a, x_2, \ldots x_{n+1} = b$; soit T_i la valeur de T pour $X = x_i$ et posons

$$t_i = \sum_1^i (y_{k+1} - y_k).$$

Chacune des quantités t_i a pour limite T_i quand les valeurs intermédiaires se rapprochent indéfiniment. On peut d'abord les supposer suffisamment rapprochées pour que la différence entre t_n et sa limite T_n soit $< \varepsilon$. La différence entre t_i et T_i ne peut être plus grande, si i est $< n$, car t_n subit les mêmes accroissements que t_i quand on ajoute de nouvelles valeurs entre a et x_i. On a donc

$$T_{i+1} - T_i < (t_{i+1} + \varepsilon) - t_i = | y_{i+1} - y_i | + \varepsilon.$$

Mais on peut aussi supposer les valeurs de x suffisamment voisines pour que les différences successives de y soient toutes $< \varepsilon$, car cette fonction est continue par hypothèse. On aura donc, dans ce cas, $T_{i+1} - T_i < 2\varepsilon$. L'oscillation de la fonction croissante T dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}) est précisément $T_{i+1} - T_i$. On peut donc rendre cette oscillation aussi petite qu'on veut dans tous les intervalles à la fois, ce qui n'est possible que si T est continue.

299. Propriétés des fonctions à variation bornée. — I. *Une fonction à variation bornée y est la différence de deux fonctions bornées, positives et essentiellement croissantes dans l'intervalle* (a, b) *et, de plus, continues si y est continue. Réciproquement, la différence de deux fonctions bornées et non décroissantes est une fonction à variation bornée.*

Nous avons vu que, Y étant la valeur de y au point X, on a

$$Y = (y_1 + P) - N.$$

Donc Y est la différence de deux fonctions de X bornées et non décroissantes. Ces fonctions sont, de plus, continues si y est continue (n° 298). On peut faire en sorte que ces deux fonctions soient positives et essentiellement croissantes ; il suffit, en effet, d'ajouter aux deux termes de cette différence une même quantité croissante et suffisamment grande, par exemple

$$| y_1 | + (X - a).$$

Réciproquement, si z et u sont deux fonctions de x bornées et non décroissantes, la fonction $z - u$ est à variation bornée. En effet, la différence des valeurs de $z - u$ pour deux valeurs x_k et x_{k+1} de x est au plus égale à la somme des accroissements de z et de u dans cet intervalle. Donc la somme de toutes ces différences entre deux valeurs extrêmes de x ne peut surpasser la somme des accroissements de z et de u entre les mêmes valeurs et $z - u$ est à variation bornée.

II. *La somme, la différence et le produit de deux fonctions à variation bornée sont des fonctions de même nature. L'inverse $1 : y$ d'une fonction à variation bornée sera aussi de même nature, pourvu que $| y |$ reste supérieur à un nombre positif fixe.*

La première partie se démontre immédiatement en considérant les deux fonctions y et y' comme les différences $z - u$ et $z' - u'$ de deux fonctions non décroissantes. On a, en effet,

$$y + y' = (z + z') - (u + u'), \qquad y - y' = (z + u') - (u + z'),$$
$$yy' = (zz' + uu') - (zu' + uz').$$

La dernière partie se vérifie aussi facilement, en observant que, si $| y |$ est $> \mu$, la somme

$$t = \Sigma \left| \frac{1}{y_{k+1}} - \frac{1}{y_k} \right| = \Sigma \left| \frac{y_{k+1} - y_k}{y_k y_{k+1}} \right| \overset{=}{<} \frac{1}{\mu^2} \Sigma \left| y_{k+1} - y_k \right|$$

reste toujours ~~sup~~inférieure à un nombre fixe.

III. *Une fonction est intégrable dans tout intervalle où elle est à variation bornée.*

En effet, une fonction non décroissante étant intégrable (n° 234, III), une fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions intégrables et est, par conséquent, intégrable.

300. Lignes continues. Contours fermés [1]. — Considérons deux fonctions continues de t

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

et faisons varier t de t_1 à T, le point M (x, y) décrit une *courbe plane continue* t_1 T.

Si le point M revient à son point de départ pour $t = T$, la courbe est *fermée*. Si x et y ne reprennent le même système de valeurs que pour les valeurs extrêmes de t, la courbe ne se coupe pas elle-même et nous dirons qu'elle forme un *contour fermé simple* ou encore qu'elle est *sans point multiple*.

La distance d'un point fixe A (ξ, η) au point M (x, y) d'une ligne

[1] C'est M. C. Jordan qui a étudié le premier les courbes au point de vue général où nous nous plaçons ici (*Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, 1893).

continue est une fonction continue de t. Si le point A n'est pas sur la courbe, cette fonction ne s'annulera pas ; elle admettra un minimum différent de zéro qu'elle atteindra pour une certaine valeur de t et que nous appellerons la *distance du point* A *à la courbe.*

Si le point A n'est pas fixe, mais seulement assujetti à se trouver sur une courbe continue $\xi = \Phi(u)$, $\eta = \Psi(u)$, la distance des points A et M est fonction continue de t, u. Si les courbes ne se rencontrent pas, le minimum de cette distance sera différent de zéro et s'appellera la *distance des deux courbes*.

301. Nous nous proposons de démontrer les propriétés fondamentales des contours fermés. Pour cela, nous utiliserons un procédé de démonstration qui consiste à décomposer la courbe en *tronçons* consécutifs, à couvrir la courbe d'un *réseau à mailles rectangulaires* et à former des *chaînons* sur les divers tronçons comme nous allons l'indiquer.

Une courbe continue t_1 T étant donnée, ses coordonnées x et y sont des fonctions limitées. On peut donc commencer par tracer un rectangle dont les côtés soient parallèles aux axes et qui contienne toute la courbe sans la rencontrer. On décompose ensuite ce rectangle lui-même en parties aussi petites qu'on le veut en menant aux deux côtés des parallèles suffisamment rapprochées. Le réseau est alors construit.

Supposons qu'on partage la courbe t_1 T en tronçons par les points t_1, t_2,... On peut supposer ces valeurs de t suffisamment voisines pour que la distance de deux points d'un même tronçon reste inférieure à une limite donnée δ. Construisons un *réseau* dont toutes les mailles aient leur diagonale inférieure à une seconde limite donnée δ' et considérons un tronçon en particulier, $t_k\, t_{k+1}$. Hachurons chaque maille rencontrée par ce tronçon. La région hachurée pourra présenter des vides, mais non se composer de morceaux séparés, car la courbe $t_k\, t_{k+1}$ étant continue ne pourrait sauter de l'un dans l'autre. Hachurons aussi les vides, s'il y en a. La région hachurée aura un contour polygonal extérieur sans points multiples, enveloppant le tronçon $t_k\, t_{k+1}$ sans le rencontrer, et dont tous les points seront à une distance du tronçon moindre que δ'. La portion du plan que nous venons d'hachurer constitue le *chainon* $t_k\, t_{k+1}$. La distance de deux points appartenant au contour du chainon sera inférieure à $\delta + 2\delta'$. Il en sera de même, par conséquent, pour deux points quelconques du chaînon.

Nous pouvons établir maintenant les propriétés fondamentales des contours fermés.

302. Propriétés des contours fermés [1]. — I. *Etant donné un contour fermé simple t_1 T, on peut construire deux polygones fermés, sans point*

[1] Les théorèmes I et II se trouvent dans le cours d'analyse de M. C. Jordan qui les a démontrés le premier, mais par des considérations différentes.

multiple, intérieurs l'un à l'autre, tels que la courbe soit renfermée tout entière dans la région annulaire comprise entre eux, que tout point de la région annulaire soit à une distance moindre que ε *de la courbe et tout point de la courbe à une distance moindre que* ε *de chacun des deux contours polygonaux.*

Soient δ et δ' deux nombres positifs vérifiant la condition $\delta + 2\delta' < \varepsilon$. Décomposons par les points $t_1, t_2, \ldots$ le contour en tronçons consécutifs sur chacun desquels l'écart de deux points reste inférieur à δ. Soit Δ la plus petite des distances de deux tronçons non consécutifs. Construisons un réseau dont les mailles aient une diagonale à la fois plus petite que δ' et que $\Delta : 4$ et formons, sur chacun des tronçons de la courbe, le *chaînon* correspondant, comme il a été expliqué ci-dessus. Ces chaînons auront toutes leurs dimensions inférieures à $\delta + 2\delta' = \varepsilon$. D'autre part, comme le bord d'un chaînon reste à une distance moindre que $\Delta : 4$, du tronçon correspondant, deux chaînons non consécutifs ne peuvent se toucher. Considérons, au contraire, les points t_1, $t_2, \ldots$ communs à deux chaînons consécutifs comme des *points de soudure*, l'ensemble des chaînons formera une *chaîne fermée*, enveloppant une région déterminée du plan.

Traçons, dans le plan, les contours de tous les chaînons. Ceux-ci décomposeront le plan en un certain nombre de régions : une région unique *extérieure à la chaîne* ; une région unique *intérieure à la chaîne* ; enfin, un nombre plus ou moins grand de régions limitées par les contours de deux chaînons consécutifs seulement. Nous réunirons toutes celles-ci en une seule que nous appellerons l'*anneau*. Cet anneau sera limité par deux contours polygonaux P et P', sans point multiple, qui répondent à la question.

En effet, tout point de la courbe, tombant dans un chaînon de dimensions moindres que ε, est à une distance moindre que ε des deux contours P et P', qui empruntent tous deux le contour du chaînon. Il reste donc seulement à démontrer que tout point m de *l'anneau* est aussi à une distance moindre que ε de la courbe. Pour cela, nous observons que le point m se trouve dans une région R limitée par les contours de deux chaînons consécutifs. Soit t_k le point de soudure de ces deux chaînons ; la droite $t_k m$ sortira de la région R au delà du point m, mais en un point d'un des deux chaînons, donc à une distance $< \varepsilon$ du point t_k. Donc m est *a fortiori* à une distance $< \varepsilon$ du point t_k de la courbe.

II. *Tout contour fermé simple décompose le plan en deux régions l'une intérieure et l'autre extérieure à la courbe.*

Soient p un point non situé sur la courbe, δ sa distance à la courbe. Construisons un anneau dont tous les points soient à une distance de la courbe moindre que δ ; le point p tombera à l'intérieur ou à l'extérieur de l'anneau. Nous dirons dans le premier cas qu'il est *intérieur à la courbe*, dans le second qu'il est *extérieur*.

Cette distinction ne dépend aucunement de la manière de construire

l'anneau, mais correspond à des propriétés distinctives par rapport à la courbe.

En effet, si le point p est extérieur à l'anneau, il est possible de tracer une ligne polygonale partant de p et s'éloignant à l'infini sans rencontrer la courbe.

Cette possibilité disparaît dès que le point est intérieur à l'anneau. En effet, toute ligne polygonale allant de p à l'infini doit scinder la chaîne et, par conséquent, couper un chaînon en deux, par exemple $t_1\ t_2$, entre ses deux points de soudures t_1 et t_2. Le tronçon $t_1\ t_2$, qui est situé tout entier dans ce chaînon, passe donc d'un morceau dans l'autre et doit rencontrer la coupure.

L'ensemble des points intérieurs et l'ensemble des points extérieurs constituent respectivement les *régions intérieure* et *extérieure* à la courbe. La région intérieure ne peut pas se réduire à zéro, car elle contient au moins une maille du réseau qui a servi à construire la chaîne. Enfin, deux points intérieurs ou deux points extérieurs peuvent toujours être réunis par une ligne polygonale qui ne rencontre pas la courbe, car on peut construire un anneau contenant les deux points et une ligne qui les réunit sans rencontrer l'anneau.

Suivant que t varie de t_1 à T ou de T à t_1 le contour fermé est parcouru dans deux sens opposés. Nous appellerons *sens direct* celui qui laisse à gauche l'intérieur de l'anneau et nous dirons qu'il laisse à gauche l'intérieur de la courbe. L'autre sera le sens *rétrograde*.

III. *Un contour fermé simple étant partagé en plus de trois tronçons consécutifs, on peut y inscrire un polygone fermé, sans point multiple, tel que les sommets se suivent dans le même ordre sur la courbe que sur le polygone et qu'il y ait au moins un sommet sur chaque tronçon.*

Construisons un réseau assez serré pour qu'une même maille ne puisse s'étendre sur deux tronçons non consécutifs. Comme on peut décrire toutes les parties du contour situées dans une même maille, *en parcourant deux tronçons consécutifs seulement dans le sens direct*, on peut assigner, sans ambiguïté, pour chaque maille m_k rencontrée par le contour, un premier point d'entrée E_k et un dernier point de sortie S_k.

L'indice 1 étant attribué arbitrairement à une première maille m_1, donnons l'indice 2 à celle où le contour pénètre au point S_1, puis l'indice 3 à celle où il pénètre au point S_2, et ainsi de suite. Considérons la suite des mailles m_1, m_2,... numérotées de la sorte. Le nombre des mailles du réseau étant limité, il y a une première maille qui se reproduira dans la série. Comme on peut recommencer le numérotage en partant de celle-là, nous supposerons que ce soit la maille m_1 et qu'elle se reproduise pour la première fois à l'indice $n-1$. Construisons le polygone $S_1S_2 \ldots S_n S_1$; ce polygone répondra à la question.

En effet, les côtés de ce polygone tombent successivement dans les mailles différentes m_2, m_3,... m_n, m_1 et ne peuvent se couper. Deux

sommets consécutifs S_k et S_{k+1}, étant sur la courbe $E_{k+1} S_{k+1}$ se suivent dans le sens direct sur un même tronçon ou sur deux tronçons consécutifs. Donc, en parcourant la série des sommets S_1, $S_2, \ldots$, on parcourt successivement les tronçons dans le même sens, sans en sauter aucun, et, comme on revient au point de départ, on les parcourt tous.

Remarque. — Il résulte du théorème précédent que l'on peut inscrire, autour d'un contour fermé simple, un polygone sans point multiple dont les côtés soient aussi petits qu'on le veut. Il suffit pour cela de décomposer préalablement le contour en tronçons, par des valeurs assez rapprochées de t pour que l'écart de deux points, situés sur deux tronçons consécutifs, ne surpasse pas la limite voulue.

303. Courbes rectifiables. — Considérons une courbe continue, définie par les deux équations

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Donnons à t une suite de valeurs $t_1, t_2, \ldots t_n, t_{n+1} = T$. Soient, en général, x_i, y_i les valeurs de x, y pour $t = t_i$. Le périmètre p du polygone inscrit, ayant ces points pour sommets, sera

$$p = \sum_1^n \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}.$$

Faisons tendre vers zéro les amplitudes de tous les intervalles $(t_{i+1} - t_i)$. Si le périmètre du polygone ainsi construit tend vers une limite déterminée et constante, quel que soit le mode de subdivision de l'intervalle (t_1, T) en parties infiniment petites, nous dirons que l'arc correspondant de la courbe est *rectifiable* et que *la longueur de l'arc* est égale à cette limite.

Pour que cette limite existe, il faut d'abord que le périmètre considéré ne croisse pas indéfiniment. Or le côté $t_i\, t_{i+1}$ est au moins égal à $|x_{i+1} - x_i|$ et à $|y_{i+1} - y_i|$, mais ne peut surpasser la somme de ces quantités. Pour que le périmètre reste fini, il est donc nécessaire et suffisant que les deux sommes

$$\sum_1^n |x_{i+1} - x_i| \qquad \text{et} \qquad \sum_1^n |y_{i+1} - y_i|$$

soient limitées et, par suite, que $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ soient des fonctions à variation bornée dans l'intervalle (t_1, T).

Cette condition nécessaire pour que l'arc soit rectifiable est aussi suffisante. En effet, supposons qu'elle soit vérifiée. Nous pourrons désigner par L la limite supérieure des périmètres de tous les polygones possibles et nous allons montrer que le périmètre du polygone $t_1\, t_2 \ldots t_{n+1}\, T$ tend vers L quand l'amplitude de tous les intervalles tend vers zéro.

Pour établir ce théorème, il suffit d'observer que le périmètre p reste

stationnaire ou augmente quand on intercale un nouveau sommet entre t_k et t_{k+1} mais que cette augmentation, ne pouvant surpasser la somme des deux nouveaux côtés, est inférieure au double de la somme des oscillations de x et de y dans l'intervalle (t_k, t_{k+1}).

Cette remarque est entièrement analogue à celle qui a été faite au nº 298 (1º) et sur laquelle repose la démonstration de la propriété (2º). Donc en raisonnant, dans le cas présent, sur p et L comme nous avons raisonné là pour prouver que t a pour limite T, nous en concluons que p a pour limite L. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant de M. C. Jordan :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe, dont les coordonnées sont exprimées en fonction de t, soit rectifiable, est que ces coordonnées x et y soient des fonctions continues de t à variation bornée.

Les propriétés fondamentales de l'arc d'une courbe rectifiable sont les suivantes :

1º *Si l'on partage un arc en plusieurs parties, la longueur totale est égale à la somme des longueurs de chaque partie.*

C'est ce que montre immédiatement la considération des polygones inscrits dans chacune des parties et dont l'ensemble est inscrit dans l'arc total.

2º *La longueur s d'un arc compté d'un point fixe t_1 à un point mobile t est une fonction continue et croissante de t.*

L'arc varie en croissant à cause de la propriété précédente et sa continuité se prouve comme celle de la fonction T considérée au nº 298 (4º).

3º *Donc t est, réciproquement, une fonction continue et croissante de s. Les coordonnées x et y, qui sont fonctions continues de t, peuvent donc toujours être considérées comme fonctions continues de s.*

4º *Si x et y ont des dérivées continues x' et y', s a aussi une dérivée continue.*

Soient t et $t + \Delta t$ deux valeurs de t, Δs l'arc compris entre elles. Désignons par M et m les limites supérieure et inférieure de x'^2 dans l'intervalle Δt, par M_1 et m_1 les limites analogues pour y'^2. Inscrivons dans l'arc Δs le polygone ayant pour sommets les points $t, \dots t_i, t_{i+1} \dots t + \Delta t$. Le côté quelconque $t_i\, t_{i+1}$ qui a pour mesure

$$\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

est, en vertu de la formule des accroissements finis, compris entre les limites

$$\sqrt{m + m_1}\,(t_{i+1} - t_i), \qquad \sqrt{M + M_1}\,(t_{i+1} - t_i)$$

Donc le périmètre total et, par conséquent, sa limite Δs seront compris entre les deux quantités

$$\sqrt{m + m_1}\, \Delta t, \qquad \sqrt{M + M_1}\, \Delta t.$$

On en conclut que le quotient $\Delta s : \Delta t$ est compris entre les deux radicaux $\sqrt{m + m_1}$ et $\sqrt{M + M_1}$ qui ont tous deux la même limite quand Δt tend vers zéro. Il vient donc, à la limite,

$$\frac{ds}{dt} = \lim \sqrt{m + m_1} = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

ce qui est la formule connue.

Nous avons considéré jusqu'ici une courbe plane, mais ces considérations s'étendent d'elles-mêmes à une courbe de l'espace. Il y a seulement une coordonnée en plus.

304. Intégrales curvilignes. — Considérons les équations d'une ligne continue

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

et supposons que le point (x, y) décrive un arc L de cette ligne quand t croît de t_1 à T. Soit P $(x. y)$ une fonction continue des deux variables x et y. Décomposons l'intervalle t_1T par les points $t_1, t_2, \ldots t_k, \ldots t_{n+1} = T$ et soit θ_i un point arbitraire de l'intervalle $t_i\, t_{i+1}$. Désignons, en général, par x_i, y_i et ξ_i, η_i les valeurs de x, y aux points t_i et θ_i. Formons alors la somme

$$\sum_1^n P(\xi_i, \eta_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Si cette somme tend vers une limite déterminée quand les valeurs successives de t sont infiniment voisines, c'est-à-dire quand les points successifs (x_i, y_i) se rapprochent indéfiniment les uns des autres, cette limite s'appelle l'intégrale du Pdx prise le long de la courbe L dans le sens t_1T, et se désigne par le symbole

$$\int_L P(x, y)\, dx.$$

Cette expression est une *intégrale curviligne*. Lorsqu'elle a un sens, on dit que la fonction Pdx est *intégrable le long de la ligne* L. On a le théorème fondamental suivant :

La fonction Pdx *est intégrable sur toute ligne continue, dont l'abscisse* $x = \varphi(t)$ *est une fonction à variation bornée, et dans ce cas, l'intégrale effectuée sur cette ligne se ramène à des intégrales définies ordinaires.*

Nous pouvons poser $x = u - z$, u et z désignant deux fonctions continues de t, essentiellement croissantes (nº 299) et qui varient de u_1 à U et de z_1 à Z quand t varie de t_1 à T. Mais alors t est, réciproquement, une

fonction continue constamment croissante de u entre u_1 et U, et aussi une fonction continue constamment croissante de z entre z_1 et Z. Donc P, qui est fonction continue de t, peut être aussi considérée soit comme fonction continue de u soit comme fonction continue de z.

Soient u_i, z_i les valeurs de u, z au point t_i ; il viendra

$$\Sigma \mathrm{P}(\xi_i, \eta_i)(x_{i+1} - x_i) = \Sigma \mathrm{P}(u_{i+1} - u_i) - \Sigma \mathrm{P}(z_{i+1} - z_i).$$

Si l'on prend u comme variable dans la première somme du second membre, et z comme variable dans la seconde, chacune de ces deux sommes a pour limite une intégrale définie ordinaire. Passons donc à la limite dans cette équation ; nous obtenons la formule

$$\int_{\mathrm{L}} \mathrm{P}\, dx = \int_{u_1}^{\mathrm{U}} \mathrm{P}\, du - \int_{z_1}^{\mathrm{Z}} \mathrm{P}\, dz.$$

L'intégrale curviligne $\int \mathrm{Q}\, dy$ se définit d'une manière toute semblable à celle de P dx. L'intégrale de la forme plus générale

$$\int_{\mathrm{L}} (\mathrm{P}\, dx + \mathrm{Q}\, dy)$$

est, par définition, la somme des deux précédentes. Celle-ci aura donc toujours une valeur bien déterminée si les fonctions x et y sont à variation bornée, c'est-à-dire *si la ligne d'intégration est rectifiable.*

305. Contours fermés quarrables. — Considérons un contour fermé simple C. Traçons un rectangle contenant ce contour et couvrons le d'un réseau à mailles rectangulaires, comme on l'a expliqué précédemment (nº 301). Soient S_1 la somme des aires des mailles qui ne contiennent que des points intérieurs à la courbe et S_2 la même somme augmentée de toutes les mailles rencontrées par la courbe. Si ces deux sommes S_1 et S_2 tendent vers une même limite S quand les mailles du réseau décroissent indéfiniment, on dit que le contour, ou que l'aire intérieure au contour, est *quarrable* et que cette aire a pour valeur S.

Cette définition [1] est conforme à l'idée que nous nous faisons d'une aire plane. En effet, la somme S_1 ne contenant que des points intérieurs doit être considérée comme une limite inférieure de l'aire intérieure, d'autre part, tout point intérieur se trouvant dans S_2, on doit regarder S_2 comme une limite supérieure de l'aire.

De là le théorème suivant :

I. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'aire intérieure à un contour fermé soit quarrable, c'est que la somme des mailles du réseau rencontrées par le contour ait pour limite zéro, quand toutes ces mailles décroissent indéfiniment.*

[1] La notion d'aire peut encore se généraliser davantage, mais il faut la rattacher à la théorie des intégrales doubles qui sera exposée dans le second volume.

Cette condition peut être remplacée par la suivante :

II. *Pour que l'aire comprise dans un contour fermé soit quarrable, il est nécessaire et suffisant que l'on puisse construire sur ce contour un anneau* (n° 302) *dont l'aire soit aussi petite que l'on veut.*

En effet, si l'on construit un réseau R, toutes les mailles rencontrées par la courbe font partie de l'anneau construit avec ce réseau. Si l'aire de l'anneau tend vers zéro, la somme de ces mailles tendra donc aussi vers zéro.

D'autre part, l'ensemble des mailles rencontrées par la courbe forme une région d'un seul morceau pouvant présenter des vides. Soit δ la plus petite distance de sa frontière à la courbe. Tout anneau dont les points seront à une distance $< \delta$ de la courbe, sera tout entier dans cette région. Donc si l'aire de cette région peut être supposée arbitrairement petite, on peut aussi construire un anneau d'une aire arbitrairement petite.

III. *Tout contour fermé simple* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, *sera quarrable si l'une de ces deux fonctions* x *ou* y *de* t *est à variation bornée.*

Soit t_1T l'intervalle dans lequel t décrit la courbe. Décomposons-le par les points $t_1, t_2 \ldots t_{n+1} = T$. Soient ε_i et η_i les oscillations de x et y dans l'intervalle $t_i\, t_{i+1}$. Le tronçon $t_i\, t_{i+1}$ de la courbe peut être inscrit dans un rectangle de côtés ε_i et η_i. Par conséquent, quand les mailles tendront vers zéro, la somme de celles qui rencontrent ce tronçon aura une limite égale ou inférieure au produit $\varepsilon_i\, \eta_i$ qui mesure ce rectangle. La somme des mailles qui rencontrent le contour proposé a donc une limite inférieure à $\Sigma \varepsilon_i\, \eta_i$. Si x, par exemple, est à variation bornée, x est la différence de deux fonctions non décroissantes, u et z, qui varient de u_1 à U et de z_1 à Z dans l'intervalle t_1T. Soit η la plus grande des quantités η_i. On aura

$$\Sigma\, \varepsilon_i\, \eta_i \leq \eta\, \Sigma\, \varepsilon_i < \eta\, [\mathrm{U} - u_1 + \mathrm{Z} - z_1]$$

La somme des mailles rencontrées par la courbe a donc une limite inférieure à cette dernière quantité. Celle-ci peut être rendue plus petite que toute quantité donnée, car η peut être supposé aussi petit qu'on veut en rapprochant suffisamment les valeurs intermédiaires de t. Donc la somme des mailles du réseau rencontrées par la courbe a pour limite zéro.

On conclut, comme cas particulier, de ce théorème que *toute courbe fermée rectifiable sera quarrable*, puisque ses deux coordonnées seront des fonctions de t à variation bornée.

IV. *L'aire intérieure à un contour fermé simple et quarrable* C *peut s'exprimer par l'une des trois intégrales curvilignes suivantes :*

$$\int_{(C)} x\,dy, \qquad -\int_{(C)} y\,dx, \qquad \frac{1}{2}\int_{(C)} (x\,dy - y\,dx),$$

effectuée sur le contour C *dans le sens direct, pourvu toutefois que cette intégrale soit déterminée. Cette condition sera d'ailleurs remplie pour la première si y est une fonction de t à variation bornée, pour la seconde si x est à variation bornée, et pour toutes les trois si la courbe est rectifiable.*

Considérons d'abord la seconde des intégrales proposées.

Construisons un *anneau* (n° 302) dont tous les points soient à une distance de la courbe moindre que δ. Inscrivons ensuite tout autour de la courbe C un polygone, sans point multiple, dont tous les côtés soient assez petits pour ne pas sortir de l'anneau (n° 302). La courbe et le polygone étant tous deux sur l'anneau, la différence des aires intérieures à l'un et à l'autre sera plus petite que celle de l'anneau. Le contour étant quarrable, on peut faire tendre cette dernière vers zéro. L'aire intérieure au contour sera donc la limite de l'aire intérieure au polygone inscrit.

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2),... les sommets consécutifs du polygone. L'aire S' du polygone se mesure par l'intégrale de ydx effectuée dans le sens rétrograde sur le contour polygonal (n° 291), ce qui revient à faire la quadrature d'une somme de trapèzes. Il vient ainsi

$$S' = \frac{1}{2} \Sigma (y_{k+1} + y_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Quand les sommets consécutifs se rapprochent indéfiniment, chacune des deux sommes $\Sigma\, y_{k+1}(x_{k+1} - x_k)$ et $\Sigma\, y_k(x_{k+1} - x_k)$ a pour limite l'intégrale de ydx effectuée dans le sens rétrograde sur le contour C, qui est déterminée par hypothèse. Donc la seconde intégrale proposée dans le théorème mesure l'aire intérieure au contour.

On prouve de même que l'aire intérieure au contour s'exprime par la première intégrale pourvu que celle-ci ait un sens. Enfin, si l'aire peut s'exprimer par les deux premières intégrales, elle s'exprimera aussi par leur demi-somme, ce qui achève la démonstration du théorème.

§ 4. Volume d'un solide. Aire d'une surface de révolution.

306. Volumes qui dépendent d'une quadrature. — La définition des volumes se rattache à la théorie des intégrales multiples et sera exposée dans la seconde partie du cours. Nous n'étudions ici qu'un cas particulier. Considérons une surface dont les sections, parallèles à un plan fixe, soient des courbes fermées et supposons que l'aire d'une section soit une fonction continue $\varphi(x)$ de la distance x du plan sécant au plan fixe. Limitons un solide à l'intérieur de la surface, en menant deux plans sécants extrêmes aux distances x_1 et X du plan fixe.

Pour définir le volume du solide compris entre la surface et ces deux plans, décomposons ce solide en tranches par les plans consécutifs x_1, x_2,... x_n, $x_{n+1} = X$. Substituons à chacune des tranches, un cylindre ayant même base $\varphi(x_k)$ et même hauteur $(x_{k+1} - x_k)$ et faisons la somme de tous ces cylindres. Cette somme sera

$$\sum_1^n \varphi(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Faisons décroître d'une manière quelconque l'épaisseur de toute les tranches, la somme précédente aura une limite déterminée, toujours la même, que l'on appelle le *volume du solide*. Cette limite est, en effet, par définition, l'intégrale définie

$$\int_{x_1}^{X} \varphi(x)dx.$$

Cette formule donne le volume compris entre les plans x_1 et X. Si l'on veut calculer le volume V compris entre les plans x_0 et x, il faudra se servir de la formule

$$(1) \qquad V = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)dx.$$

Quand la fonction $\varphi(x)$ est connue, cette formule ramène à une simple intégration la détermination du volume V.

307. Exemples. — I. *Ellipsoïde* : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Cherchons le volume compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe des x. La section par un plan x quelconque est une ellipse dont les demi-axes ont pour expressions

$$b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \qquad c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Donc, d'après la valeur connue de l'aire de l'ellipse (nº 288), nous aurons

$$\varphi(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Le volume, compris entre les plans O et x, sera

$$V = \pi bc \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)$$

Si $x = a$, on obtient la moitié du volume de l'ellipsoïde; le volume total sera donc $\frac{4}{3}\pi abc$. Ce volume vaut les $\frac{2}{3}$ du cylindre qui a une des sections axiales de l'ellipsoïde pour base et l'axe normal à cette section pour hauteur, cylindre qui peut être circonscrit à l'ellipsoïde.

II. *Paraboloïde elliptique* : $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2x$. La section faite par le plan x est une ellipse dont les demi-axes sont $b\sqrt{2x}$ et $c\sqrt{2x}$, et l'aire $2\pi bcx$. Le volume du segment détaché du paraboloïde par un plan x normal à l'axe, est donc

$$V = 2\pi bc \int_0^x x dx = \pi bc\, x^2.$$

C'est la moitié de celui du cylindre qui a même base et même hauteur que le segment du paraboloïde.

308. Solides de révolution. — L'aire qui a été désignée par $\varphi(x)$ s'obtient immédiatement dans le cas très étendu des solides de révolution autour de l'axe des x. Soit $f(x)$ une fonction continue et $y = f(x)$ l'équation d'une courbe en coordonnées rectangulaires. En tournant autour de l'axe OX, cette courbe engendre une surface de révolution. La section faite par le plan x est un cercle de rayon y. Donc $\varphi(x) = \pi y^2$. Le volume V du segment compris entre les plans x_0 et x, sera donné par la formule

$$(2) \qquad V = \pi \int_{x_0}^{x} y^2 dx = \pi \int_{x_0}^{x} f(x)^2\, dx.$$

Cette formule s'applique aussi au cas où la courbe est définie par une représentation paramétrique ou en coordonnées polaires, il suffit d'exprimer $y^2 dx$ en fonction de t ou en fonction de θ et de donner comme limites à l'intégrale les valeurs limites de t ou de θ.

L'aire qui engendre le volume de révolution peut aussi être comprise entre deux courbes

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x), \quad (y_1 < y_2).$$

Dans ce cas, le volume de révolution est la différence des volumes engendrés par les deux courbes. On aura donc

$$(3) \qquad V = \pi \int_{x_0}^{x} (y_2^2 - y_1^2)\, dx.$$

Plus généralement, on peut chercher le volume engendré par la révolution de l'aire intérieure à une courbe fermée C, entièrement située au dessus de OX. Supposons que le contour C puisse se décomposer en un nombre limité d'arcs sur lesquels x varie toujours dans le même sens. En raisonnant comme au n° 291, on verra que le volume de révolution peut s'exprimer par l'intégrale curviligne

(4) $$V = -\pi \int_{(C)} y^2 dx,$$

le contour C étant parcouru dans le sens direct (¹).

309. Exemples de volumes de révolution. — I. *Cycloïde.* Supposons que la révolution se fasse autour de la base ; on aura

$$y^2 dx = a^3 (1 - \cos t)^3 \, dt.$$

Le volume, engendré par l'arc compris entre l'origine et le point qui a pour paramètre t, sera

$$V = \pi a^3 \int_0^t (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) \, dt$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5t}{2} - 4 \sin t + \frac{3}{2} \sin t \cos t + \frac{\sin^3 t}{3} \right).$$

Si $t = 2\pi$, on obtient le volume $5\pi^2 a^3$ engendré par l'arcade entière.

II *Tore.* Le tore est engendré par la révolution d'un cercle autour d'une droite. Considérons le cercle

$$x^2 + (y - c)^2 = a^2 ,$$

dont l'équation donne deux valeurs pour y, savoir

$$y_1 = c - \sqrt{a^2 - x^2} \qquad y_2 = c + \sqrt{a^2 - x^2} .$$

On en tire

$$y_2^2 - y_1^2 = 4 \, c \sqrt{a^2 - x^2} .$$

Faisons tourner le cercle autour de l'axe des x, le volume de la tranche du tore comprise entre les plans 0 et x s'évalue par la formule (3). Il vient

$$V = 4\pi c \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = 2\pi c \left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right].$$

Si $x = a$, on obtient la moitié du volume du tore. Le volume total sera donc $2\pi^2 ca^2$.

310. Aire d'une surface de révolution. — Considérons encore la surface engendrée par la révolution d'une courbe *rectifiable* quelconque autour de l'axe des x. Nous supposerons seulement que l'ordonnée

(¹) On peut encore généraliser ce résultat. En raisonnant, comme au n° 305, on peut montrer que l'équation (4) subsiste pourvu que le contour C soit quarrable et que l'intégrale curviligne ait un sens. Ceci aura toujours lieu si le contour C, défini par les équations $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, est rectifiable et, plus généralement, si x seulement est à variation bornée.

de la courbe soit positive. Prenons comme variable l'arc s de la courbe compté à partir d'une origine fixe. Les coordonnées x et y d'un point de la courbe seront des fonctions continues de s.

L'aire de la surface, engendrée par la portion de la courbe comprise entre deux points extrêmes, est, par définition, *la limite de l'aire engendrée par la révolution d'un polygone inscrit dont tous les côtés tendent vers zéro* [1].

Soient s_1 et S les valeurs de s aux points extrêmes ; marquons sur la courbe une suite de points où s prend les valeurs successives s_1, $s_2, \ldots s_n$, $s_{n+1} = S$. Soient x_i et y_i les valeurs de x et y quand $s = s_i$. Inscrivons un polygone ayant ces points pour sommets et soit c_i le côté qui joint (x_i, y_i) à (x_{i+1}, y_{i+1}). Ce côté engendre en tournant la surface latérale d'un tronc de cône, laquelle a pour mesure, d'après la géométrie élémentaire,

$$2\pi \frac{y_i + y_{i+1}}{2} c_i$$

L'aire engendrée par le polygone entier s'obtient en sommant toutes les expressions semblables à la précédente, ce qui peut s'écrire comme il suit :

$$2\pi \sum_1^n \frac{y_i + y_{i+1}}{2}(s_{i+1} - s_i) - 2\pi \sum_1^n \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\left[(s_{i+1} - s_i) - c_i\right].$$

Considérons d'abord la seconde somme. Comme c_i est la corde de l'arc $s_{i+1} - s_i$, toutes les différences entre crochets sont positives. Donc, M désignant le maximum de y, cette seconde somme est moindre que

$$2\pi M \sum_1^n \left[(s_{i+1} - s_i) - c_i\right] = 2\pi M \left[S - s_1 - \sum_1^n c_i\right]$$

Comme l'arc $S - s_1$ est, par définition, la limite du périmètre Σc_i, cette expression tend vers zéro quand tous les côtés tendent vers 0.

L'aire de la surface de révolution est donc égale à la limite de la première somme. Mais, la demi-somme de y_i et y_{i+1} étant une valeur moyenne de y dans l'intervalle (s_i, s_{i+1}) de s, la première somme tend, par définition, vers une intégrale définie, quand tous ces intervalles tendent vers zéro ; et l'on obtient, pour calculer l'aire A de la surface, la formule

$$A = 2\pi \int_{s_1}^{S} y\, ds. \tag{5}$$

[1] La définition de l'aire d'une surface quelconque sera donnée dans la seconde partie du cours.

Cette formule suppose seulement l'arc rectifiable. On peut en déduire d'autres applicables aux divers cas qui se rencontrent en pratique et dans lesquels s n'est pas la variable indépendante. Ces formules se déduisent de la précédente par un changement de variable, mais il faut des hypothèses plus restrictives.

Suivant que la courbe sera définie par une représentation paramétrique, par l'équation $y = f(x)$, ou en coordonnées polaires, on aura, *pourvu que les dérivées représentées par x', y' et r' existent et soient continues,*

$$ds = dt\sqrt{x'^2 + y'^2} = dx\sqrt{1 + y'^2} = d\theta\sqrt{r^2 + r'^2}.$$

Prenant t, x ou θ comme variable, on transformera donc, suivant le cas, la valeur (5) de A dans l'une des suivantes :

$$2\pi\int_{t_0}^{t} y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt,\quad 2\pi\int_{x_0}^{x} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx,\quad 2\pi\int_{\theta_0}^{\theta}(r\sin\theta)\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta,$$

les limites se rapportant aux extrémités de l'arc. Ce sont ces formules que l'on applique en pratique.

311. Aire de l'ellipsoïde de révolution. — Nous prendrons pour variable l'angle φ déjà considéré au n° 295. On a alors

$$x = a\sin\varphi,\qquad y = b\cos\varphi,\qquad ds = d\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$$

Il y a deux cas à distinguer suivant que l'ellipsoïde est de révolution autour du grand axe ou du petit.

1° *Ellipsoïde surhaussé* $(a > b)$. Soit $\varepsilon = (\sqrt{a^2 - b^2}) : a$ l'excentricité absolue. Pour obtenir l'aire totale de l'ellipsoïde, il faut doubler l'aire engendrée par l'arc ayant pour extrémités $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi : 2$. On aura, par la relation $\varepsilon\sin\varphi = \sin t$,

$$S = 4\pi ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi}\cos\varphi\,d\varphi = \frac{4\pi ab}{\varepsilon}\int_0^{\operatorname{arc\,sin}\varepsilon}\cos^2 t\,dt$$

$$S = \frac{2\pi ab}{\varepsilon}\Big[t + \sin t\cos t\Big]_0^{\operatorname{arc\,sin}\varepsilon} = 2\pi ab\left[\frac{\operatorname{arc\,sin}\varepsilon}{\varepsilon} + \sqrt{1-\varepsilon^2}\right]$$

Ce résultat se simplifie par la relation $\sqrt{1 - \varepsilon^2} = b : a$; il vient

$$S = 2\pi\left[b^2 + ab\,\frac{\operatorname{arc\,sin}\varepsilon}{\varepsilon}\right]$$

2° *Ellipsoïde surbaissé* $(a < b)$. Soit $k = (\sqrt{b^2 - a^2}) : a$; on aura

$$S = 4\pi ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 + k^2\sin^2\varphi}\cos\varphi\,d\varphi = 4\pi ab\,k\int_0^1\sqrt{\frac{1}{k^2} + t^2}\,dt.$$

Cette intégrale a été calculée au n° 294 ; il vient

$$S = 2\pi ab\left[\sqrt{1+k^2} + \frac{1}{k}\operatorname{Log}\left(k + \sqrt{1+k^2}\right)\right]$$

et, par la relation $\sqrt{1+k^2} = b : a$,

$$S = 2\pi\left[b^2 + \frac{ab}{k}\operatorname{Log}\left(k + \sqrt{1+k^2}\right)\right]$$

Ces deux expressions donnent à la limite l'aire de la sphère en faisant tendre b vers a et, par conséquent, ε et k vers zéro. On trouve la valeur connue $4\pi a^2$.

Exercices.

1. Calculer les volumes et les surfaces engendrées par les révolutions :
   1° d'une chaînette autour de sa base ;
   2° d'une spirale logarithmique autour de l'axe polaire ;
   3° de la cardioïde : $r = 2a(1 - \cos\theta)$ autour du même axe ;
   4° de la lemniscate : $r^2 = a^2\cos 2\theta$ autour du même axe.

Ces problèmes conduisent à des intégrales qui s'effectuent facilement sous forme finie.

2. Volumes engendrés par les révolutions :
   1° d'une spirale d'Archimède autour de l'axe polaire ;
   2° d'une cissoïde autour de son asymptote.

Ces volumes se calculent également sous forme finie.

§ 5. Calcul des intégrales définies par approximation.

312. Principe de la méthode. — Un grand nombre de problèmes relatifs à la mécanique, à la physique et à l'art de l'ingénieur conduisent à des intégrales définies qu'il est impossible d'obtenir rigoureusement sous forme finie. Pour les calculer il faut recourir aux formules d'approximation. Celles-ci sont d'autant plus avantageuses qu'elles exigent moins de calculs et comportent une exactitude plus grande. Il en existe un grand nombre. Nous allons faire connaître seulement les plus utiles et les plus élémentaires.

L'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$, où nous supposerons $f(x)$ positif et $b > a$, représente, comme on l'a vu, l'aire S limitée par la courbe $y = f(x)$, l'axe OX et les deux droites $x = a$ et $x = b$. Le problème d'évaluer cette aire est donc le même que celui de calculer l'intégrale ; et, réciproquement, toute détermination approchée de l'aire S fournira une valeur approximative de l'intégrale.

313. Détermination de limites supérieures et inférieures d'une intégrale définie. — Nous supposerons que dans tout l'intervalle (a, b) de l'intégration, la courbe $y = f(x)$ tourne sa concavité dans le même sens. Si cette condition n'était pas réalisée, il faudrait commencer par décomposer l'aire en plusieurs autres pour lesquelles la condition aurait lieu.

Nous supposerons, pour fixer les idées, que *la courbe tourne sa concavité vers le bas*. Dans l'hypothèse inverse, l'ordre des limites que nous allons obtenir serait interverti. Une limite supérieure deviendrait une limite inférieure et réciproquement.

Ceci posé, on peut, d'après M. Mansion, procéder comme il suit pour enfermer l'intégrale entre des limites que l'on sait évaluer :

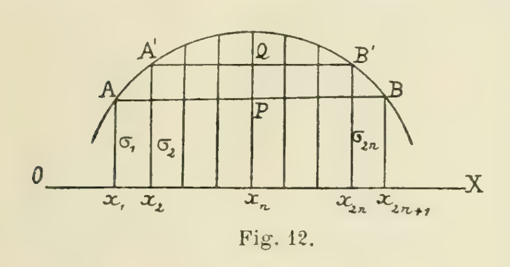


Fig. 12.

On décompose l'intervalle (a, b) en un nombre pair $2n$ de parties égales d'amplitude $h=(b-a):2n$ par les points $x_1 = a$, x_2, $x_3, \ldots x_{2n+1} = b$; puis on décompose l'aire S à évaluer en segments consécutifs $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{2n}$ (fig. 12) en menant toutes les ordonnées correspondantes $y_1, y_2, \ldots y_{2n+1}$.

La courbe tournant par hypothèse sa concavité vers le bas, tout segment compris entre deux ordonnées quelconques y_i et y_k surpasse le trapèze que l'on y inscrit en joignant les sommets des deux ordonnées.

On trouve ainsi, pour le segment σ_k compris entre les ordonnées y_k et y_{k+1}, l'inégalité

$$(1) \qquad \sigma_k > \frac{h}{2}(y_k + y_{k+1}).$$

De même, pour le segment $\sigma_{2i} + \sigma_{2i+1}$ compris entre les ordonnées y_{2i} et y_{2i+2},

$$(2) \qquad \sigma_{2i} + \sigma_{2i+1} > h(y_{2i} + y_{2i+2})$$

Mais on peut aussi assigner une limite supérieure aux segments. Tout segment compris entre deux ordonnées verticales est moindre que le trapèze qu'on lui circonscrit en menant à la courbe, entre ces ordonnées prolongées, une tangente intermédiaire quelconque. En particulier, le segment $\sigma_{2i-1} + \sigma_{2i}$ compris entre les ordonnées

y_{2i-1} et y_{2i+1} est moindre que le trapèze qu'on lui circonscrit en menant la tangente au sommet de l'ordonnée médiane y_{2i}. Ce trapèze a pour mesure sa hauteur $2h$ multipliée par la moyenne y_{2i} de ses bases. On a donc

(3) $$\sigma_{2i-1} + \sigma_{2i} < 2h\, y_{2i}.$$

De là résultent facilement diverses limites supérieures ou inférieures pour l'aire totale S. Pour les écrire plus facilement, désignons par :

P la somme des ordonnées paires $y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n}$;

I celle des ordonnées impaires $y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n+1}$;

E_1 celle des ordonnées impaires extrêmes $y_1 + y_{2n+1}$;

E_2 celle des ordonnées paires extrêmes $y_2 + y_{2n}$.

On obtient d'abord une *limite supérieure* L par la formule (3). On a, en effet,

$$S = \sum_1^n (\sigma_{2i-1} + \sigma_{2i}) < 2hP$$

Par conséquent

(4) $$S < L = 2hP.$$

On obtient ensuite une *première limite inférieure* l par la formule (1), car on a

$$S = \sum_1^{2n} \sigma_k > \frac{h}{2}(2P + 2I - E_1);$$

par conséquent,

(5) $$S > l = h\left(P + I - \frac{E_1}{2}\right).$$

Cette formule donne une valeur approchée l de S; on l'appelle *la formule des trapèzes.*

Enfin on peut obtenir une *seconde limite inférieure* l' en combinant les formules (1) et (3). On a, en effet,

$$S = \sigma_1 + \sigma_{2n} + \sum_1^{n-1} (\sigma_{2i} + \sigma_{2i+1}).$$

On remplace σ_1 et σ_{2n} par leurs limites (1) et les parenthèses par leurs limites (2), ce qui donne

$$S > h\frac{E_1 + E_2}{2} + h\,(2P - E_2)$$

et, en réduisant,

(6) $$S > l' = h\left[2P - \frac{E_2 - E_1}{2}\right].$$

Cette dernière limite a l'avantage de ne pas faire intervenir les ordonnées intermédiaires d'ordre impair. Quand on se sert des limites (4) et (6), on peut donc se dispenser de calculer ces ordonnées.

314. Formules de Poncelet et de Simpson. — Ces formules s'obtiennent par la combinaison des limites précédentes :

1° *La formule de Poncelet* s'obtient en donnant comme valeur à S la moyenne arithmétique des valeurs L et l'. On trouve ainsi

$$(7) \qquad S = \frac{L + l'}{2} = h\left[2P - \frac{E_2 - E_1}{4}\right].$$

L'erreur commise sera moindre en valeur absolue que

$$\frac{L - l'}{2} = \frac{h}{2}\,\frac{E_2 - E_1}{2},$$

mais on en ignore le sens.

Cette limite de l'erreur peut se représenter géométriquement.

En effet, si l'on joint (fig. 12) les sommets A et B des ordonnées extrêmes y_1 et y_{2n+1} et les sommets A' et B' des ordonnées extrêmes de rang pair y_2 et y_{2n}, ces deux droites AB et A'B' interceptent sur l'ordonnée du milieu y_n un segment PQ qui est précisément égal à $(E_2 - E_1) : 2$. L'erreur est donc moindre que la moitié du rectangle construit sur ce segment PQ et la distance h de deux ordonnées consécutives.

La formule de Poncelet est très suffisamment exacte et elle est surtout pratique à cause de sa simplicité. Elle ne nécessite pas le calcul des ordonnées intermédiaires de rang impair.

2° *La formule de Simpson* s'obtient en faisant

$$(8) \qquad S = \frac{L + 2l}{3} = \frac{h}{3}(4P + 2I - E_1).$$

La formule de Simpson se montre presque toujours pratiquement la plus exacte. Mais les principes qui nous ont servi jusqu'ici ne suffisent pas pour justifier théoriquement de sa supériorité. Tout ce que nous voyons pour le moment, c'est que l'erreur ne peut pas surpasser

$$L - \frac{L + 2l}{3} = \frac{2}{3}(L - l).$$

Pour justifier de la supériorité de la formule de Simpson, nous allons chercher par une autre voie une expression analytique de l'erreur commise. Cette expression pourra servir en pratique chaque

fois que la dérivée quatrième de $f(x)$ sera connue. Dans les autres cas, la formule de Poncelet sera préférable à celle de Simpson, car elle donnera un résultat aussi sûr avec moins de calculs.

315. Reste de la formule de Simpson. — Nous appellerons *reste* de la formule de Simpson, la différence entre la vraie valeur de l'intégrale et celle que donne la formule de Simpson. Nous allons donc chercher une expression commode de ce reste.

Nous pouvons nous affranchir de toutes les conditions que nous avons imposées à la fonction $f(x)$ dans les numéros précédents. Par contre, nous devons en introduire une nouvelle ; nous supposerons que les dérivées de $f(x)$ sont déterminées et continues jusqu'au quatrième ordre inclus.

Nous commencerons par former l'expression du reste dans le cas où le calcul se fait avec deux subdivisions seulement. Il n'y a alors qu'un seul point de subdivision de l'intervalle d'intégration, nous le désignerons par x et les valeurs extrêmes seront $x - h$, et $x + h$.

Soit $F(x)$ une intégrale de $f(x)$. La vraie valeur de l'aire cherchée sera

$$F(x+h) - F(x-h),$$

et celle fournie par la formule de Simpson

$$\frac{h}{3}[f(x+h) + f(x-h) + 4f(x)]$$

Considérons x comme donné et h comme variable ; les deux expressions précédentes seront fonctions de h et leur différence ou le *reste* de la formule pourra se désigner par $\varphi(h)$. Il vient ainsi

$$\varphi(h) = F(x+h) - F(x-h) - \frac{h}{3}[f(x+h) + f(x-h) + 4f(x)].$$

Comme le montre un calcul simple, cette fonction s'annule ainsi que ses dérivées premières et secondes pour $h = 0$ et la dérivée troisième a pour expression

$$\varphi'''(h) = -\frac{h}{3}[f'''(x+h) - f'''(x-h)].$$

Désignons par ξ une quantité inconnue mais comprise entre $x - h$ et $x + h$; le théorème des accroissements finis donne

$$\varphi'''(h) = -\frac{2h^2}{3} f^{\text{IV}}(\xi)$$

Multiplions successivement par dh et intégrons trois fois de suite

les deux membres de cette équation entre 0 et h. On peut chaque fois, en vertu du théorème de la moyenne, et sans qu'il faille changer le sens général de ξ, faire sortir le facteur $f^{\text{IV}}(\xi)$ du signe $\int$ et n'intégrer que la puissance de h. On trouve ainsi, puisque φ, φ' et φ'' sont nuls pour $h = 0$,

$$\varphi(h) = -\frac{4}{3} f^{\text{IV}}(\xi)\, \frac{h^5}{5!}$$

Telle est l'expression simple et remarquable de l'erreur commise quand on applique la formule de Simpson avec deux subdivisions seulement. Si la courbe est une parabole du second ou du troisième degré, la dérivée 4[e] de $f(x)$ est identiquement nulle et la *formule de Simpson* donne un résultat exact.

Revenons maintenant au cas général, envisagé au n° précédent, dans lequel il y a un nombre pair $2n$ de subdivisions. Considérons le segment $\sigma_{2i-1} + \sigma_{2i}$ de la courbe (n° 313) compris entre les ordonnées y_{2i-1} et y_{2i+1}. On peut le calculer par la formule que nous venons d'établir. Il vient ainsi

$$\sigma_{2i-1} + \sigma_{2i} = \frac{h}{3}\,[y_{2i-1} + y_{2i+1} + 4y_{2i}] - \frac{4}{3} f^{\text{IV}}(\xi)\, \frac{h^5}{5!}$$

où ξ est intermédiaire entre x_{2i-1} et x_{2i+1}.

Faisons la somme des résultats précédents pour tous les indices $i = 1, 2,\dots n$; il viendra, ξ étant maintenant compris entre a et b,

$$\mathrm{S} = \frac{h}{3}[2\mathrm{I} + 4\mathrm{P} - \mathrm{E}_1] - n\,\frac{4}{3} f^{\text{IV}}(\xi)\, \frac{h^5}{5!}$$

ou, comme $2nh = b - a$,

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{S} = \frac{h}{3}\,[2\mathrm{I} + 4\mathrm{P} - \mathrm{E}_1] - \frac{h^4}{180}(b-a) f^{\text{IV}}(\xi)$$
$$(a < \xi < b).$$

Cette formule coïncide avec la formule (8), à part le dernier terme. C'est la formule de Simpson complétée par l'expression du reste. Cette expression permet donc d'évaluer une limite de l'erreur commise par la formule primitive. Si la dérivée quatrième ne change pas de signe, le sens de l'erreur sera connu, puisqu'on connaîtra le signe du reste. Celui-ci pourra même servir à rectifier dans une certaine mesure le résultat obtenu.

Si h est très petit, l'erreur commise par la formule de Simpson sera très petite, car elle est seulement du quatrième ordre par rapport à h. C'est de là que vient la supériorité de cette formule sur les autres où l'erreur est d'un ordre de grandeur plus élevé.

CHAPITRE X.

Des séries.

---

§ 1. Généralités sur les séries à termes constants. Séries absolument convergentes.

316. Définitions. — On appelle série une suite indéfinie de quantités, réelles ou complexes, u_1, u_2,... u_n,... formées suivant une loi déterminée et que l'on ajoute successivement les unes aux autres. Le terme u_n se nomme *le terme général* de la série. Son expression donnée en fonction de n fait connaître toute la série. Soit

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

la somme des n premiers termes de la série. Si, pour une valeur indéfiniment croissante de n, la somme s_n tend vers une limite finie et déterminée s, la série est *convergente* et s est la somme ou la valeur de la série. Si s_n ne tend vers aucune limite ou augmente indéfiniment, la série est *divergente.*

Lorsqu'une série est convergente, la différence

$$s - s_n = \mathrm{R}_n$$

entre la somme de la série et celle des n premiers termes s'appelle le *reste* de la série à partir du $n^{\text{ième}}$ terme. Ce reste est la somme de la série suivante :

$$\mathrm{R}_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots,$$

qui est donc convergente (ou divergente) en même temps que la première. Ainsi, on peut toujours dans l'étude de la convergence d'une série faire abstraction d'un nombre limité de termes au début. Si la série est mise sous la forme Σu_n, on peut donc aussi, à ce point de vue, remplacer n par $n+k$ ou $n-k$ dans le terme général, k étant fixe, puisque cela revient à ajouter ou à retrancher k termes au début.

317. Caractère général de convergence. — Pour qu'une série converge, il faut que les sommes successives s_1, s_2,... s_n,... tendent vers une limite déterminée. De là la proposition fondamentale :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série converge est que l'on ait,

$$\lim_{n=\infty} (s_{n+p} - s_n) = 0,$$

le nombre p reste arbitraire et pouvant croître d'une manière quelconque avec n.

Quand les quantités s_1, s_2,... sont réelles, ce théorème est la reproduction de celui du n° 13. D'ailleurs ce théorème subsiste si les quantités s_1, s_2,... s_n,... sont complexes. En effet, si l'on a

$$s_n = s'_n + is''_n,$$

s'_n et s''_n étant réels, il faut, par définition, que s'_n et s''_n aient une limite pour que s_n en ait une. Il faut donc que l'on ait

$$\lim (s'_{n+p} - s'_n) = 0, \qquad \lim (s''_{n+p} - s''_n) = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\lim [(s'_{n+p} - s'_n) + i (s''_{n+p} - s''_n)] = \lim (s_{n+p} - s_n) = 0.$$

Corollaire Le théorème précédent, nous donne immédiatement la condition suivante, *toujours nécessaire*, mais non suffisante, pour la convergence d'une série :

Dans toute série convergente, le terme général u_n a pour limite 0 *pour n infini.*

En effet, en faisant $p = 1$ dans la condition précédente, on trouve

$$\lim (s_{n+1} - s_n) = \lim u_{n+1} = 0.$$

318. Cas de convergence d'une progression géométrique. — Une des séries les plus utiles à considérer est la *progression géométrique*

$$a + ak + ak^2 + \ldots + ak^n + \ldots$$

On a ici

$$s_n = \frac{a(1 - k^n)}{1 - k}.$$

Si $|k|$ est < 1, k^n tend vers zéro et s_n vers $a : (1 - k)$; la série converge.

Si $|k|$ est $=$ ou > 1, le terme général ak^n n'a pas pour limite zéro et la série ne peut pas être convergente. (Sauf si $a = 0$, auquel cas tous les termes sont nuls.)

319. Addition des séries. — *Etant données deux séries convergentes $s = \Sigma u_n$ et $s' = \Sigma v_n$, la série $s'' = \Sigma (u_n \pm v_n)$ sera convergente et aura pour somme $s \pm s'$. On peut d'ailleurs considérer $u_n \pm v_n$ comme un*

seul terme ou comme deux termes consécutifs de s'', car, ces termes tendant vers zéro, la valeur de s'' est la même dans les deux cas.

Soient s_n, s'_n, s''_n les sommes des n premiers termes pour chaque série, $(u_n \pm v_n)$ étant considéré comme un terme. On a, quel que soit n,

$$s''_n = s_n \pm s'_n$$

Donc, à la limite, $s'' = s \pm s'$.

320. Séries absolument convergentes. — On dit qu'une série est *absolument convergente,* quand elle converge après qu'on a remplacé chaque terme par son module. *Une série absolument convergente est convergente.* C'est un cas particulier de la proposition suivante, qui est d'une application fréquente :

I. *Toute série Σu_n dont les termes ont leurs modules respectivement égaux ou inférieurs aux termes de même rang d'une série convergente à termes positifs Σr_n (ou aux modules des termes d'une série absolument convergente) est convergente et absolument convergente.*

On aura, en effet,

$$| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} | < r_{n+1} + r_{n+2} + \ldots r_{n+p}.$$

Le second membre tend vers zéro pour n infini, parce que le caractère de convergence doit se vérifier pour la série Σr_n qui converge par hypothèse. Donc le premier membre a aussi pour limite zéro et le caractère de convergence est vérifié pour Σu_n. D'ailleurs, la convergence est absolue, car le raisonnement précédent subsiste après qu'on a remplacé chaque terme u_n par son module.

II. *Si deux séries Σu_n et Σv_n sont absolument convergentes, leur somme ou leur différence $\Sigma (u_n \pm v_n)$ est encore absolument convergente.*

Soient r_n et r'_n les modules de r_n et de r'_n. La série à termes positifs $\Sigma (r_n + r'_n)$ sera convergente (n° 319). Comme le module de $(u_n \pm v_n)$ ne peut surpasser $(r_n + r'_n)$, la série $\Sigma (u_n \pm v_n)$ sera absolument convergente en vertu du théorème précédent, soit qu'on considère $u_n \pm v_n$ comme un seul terme ou comme deux termes consécutifs.

III. *On peut changer l'ordre des termes d'une série Σu_n absolument convergente et les grouper comme on le veut sans altérer la valeur de la série.*

Soit ε un nombre positif aussi petit qu'on veut. Désignons par r_n le module de u_n. On peut, par hypothèse, supposer n assez grand pour qu'on ait, p restant arbitraire,

$$r_{n+1} + r_{n+2} + \dots r_{n+p} < \varepsilon.$$

Soit s_n la somme des n premiers termes de la série rangés dans l'ordre primitif et s sa limite. D'autre part, sommons successivement les termes d'une autre manière quelconque. Il arrivera un moment où la somme s'_m ainsi obtenue comprendra tous les u_n d'indice $< n$, mais avec d'autres termes d'indices $(n+\alpha)$, $(n+\beta)$... $(n+p)$. On aura

$$|\, s'_m - s_n \,| < r_{n+\alpha} + r_{n+\beta} + \dots + r_{n+p} < r_{n+1} + r_{n+2} + \dots r_{n+p} < \varepsilon.$$

Donc s'_m finit par différer aussi peu qu'on veut de s_n, qui diffère lui-même aussi peu qu'on veut de s, et s'_m a pour limite s.

Remarque. — La démonstration précédente suppose que, pour chaque valeur de n, la somme s'_m se compose d'un nombre limité de termes. On ne peut plus raisonner ainsi, si la sommation se fait en groupant les termes dans un nombre plus ou moins grand ou même illimité de séries partielles, que l'on ajoute successivement les unes aux autres. Cependant le théorème III subsiste encore.

Soient, en effet, S_1, S_2,... S_k,... les sommes des diverses séries partielles. *Celles-ci sont absolument convergentes.* Pour le montrer, remplaçons par des zéros les termes de la série totale s qui n'entrent pas dans S_k. La série modifiée demeure absolument convergente en vertu du théorème I. Comme on peut supprimer les termes nuls, elle se compose des mêmes termes que S_k et, comme l'ordre des termes est indifférent, les deux séries sont équivalentes.

Ceci posé, l'expression $s - S_1 - S_2 - \cdots - S_k$ peut par la règle du nº 319 se réduire à une seule série en u_n absolument convergente (II). L'ordre des termes étant arbitraire, on peut supprimer ceux qui se détruisent. On peut donc supposer k assez grand pour que cette expression ne contienne plus que des termes u d'indices $> n$. Donc, si n est choisi comme dans la démonstration précédente, le module de l'expression sera $< \varepsilon$. Faisons tendre ε vers zéro, on aura

$$s = S_1 + S_2 + \cdots + S_k + \cdots\cdots$$

comme il fallait l'établir.

IV. *Si deux séries $s = \Sigma u_n$ et $s' = \Sigma u'_n$ sont absolument convergentes, la série $\Sigma u_p\, u'_q$ qui contient tous les produits d'un terme de la*

première par un terme de la seconde rangés dans un ordre quelconque, est absolument convergente et a pour somme ss'.

Je dis d'abord que cette série est absolument convergente. En effet, soit $\Sigma r_p r'_q$ la série obtenue en remplaçant les u par leurs modules r. Sommons les N premiers termes de cette nouvelle série et soit μ le plus grand indice p ou q qui figure dans ces N termes. On aura

$$\sum_{N} r_p r'_q < \sum_{1}^{\mu} r_p \sum_{1}^{\mu} r'_q .$$

Mais les facteurs du second membre restent finis, par hypothèse, quel que soit μ. Donc la somme du premier membre reste finie, et, comme elle augmente avec N, elle converge. Donc la série $\Sigma u_p u'_q$ est absolument convergente.

Il en résulte facilement qu'elle a pour somme ss'. En effet, on peut en vertu du théorème précédent additionner ses termes comme on veut. On peut donc faire figurer successivement dans la somme tous les termes des produits $s_n s'_n$, puis $s_{n+1} s'_{n+1}$, etc... et on obtient ainsi comme limite ss'.

321. Séries semi-convergentes. — Une série peut converger sans être absolument convergente. On dit dans ce cas qu'elle est semi-convergente. Tandis que les séries absolument convergentes jouissent, comme on vient de le montrer, de propriétés qui les rapproche des polynômes, il n'en est plus ainsi des séries semi-convergentes. Aussi leur emploi est beaucoup moins commode dans l'analyse.

L'étude de la convergence absolue se confond avec celle de la convergence des séries à termes positifs. Ce sont donc celles-ci que nous examinerons pour commencer.

§ 2. Séries à termes positifs.

322. Règles de convergence ou de divergence tirées de la comparaison des séries entre elles. — Lorsque tous les termes d'une série Σu_n sont positifs (ou nuls), la somme s_n est croissante (ou stationnaire) quand n augmente. Il suffit donc, pour que la série soit convergente, que s_n conserve une valeur finie. Cette circonstance permet d'obtenir des règles très importantes de convergence et de divergence par la comparaison des séries entre elles.

I. *Si la série Σu_n est convergente (divergente) et si tous les termes*

de la série Σv_n sont, à partir d'un certain rang, plus petits (plus grands) que les termes de même rang de la série Σu_n, la série Σv_n sera également convergente (divergente).

En effet, soient s_n et s'_n les sommes des n premiers termes de la série (u) et de la série (v). Comme on peut faire abstraction des termes au début des deux séries qui ne satisferaient pas à l'inégalité du théorème, on peut supposer qu'elle a lieu dès le début. Alors la somme s'_n sera constamment inférieure (supérieure) à la somme s_n, donc, si celle-ci reste finie (croît indéfiniment), il en sera *a fortiori* de même pour s'_n, ce qui prouve le théorème.

II. *Si la série Σu_n est convergente (divergente), la série Σv_n obtenue en multipliant respectivement chaque terme de la précédente par des facteurs positifs inférieurs (supérieurs) à un nombre positif* A *sera également convergente (divergente).*

Multiplier tous les termes de la série Σu_n par un facteur fixe A, revient à multiplier chaque somme s_n par A ; donc cette multiplication laisse la série convergente (divergente). La série Σv_n ayant ses termes moindres (plus grands) que les termes correspondants de la série $\Sigma A u_n$ sera donc aussi convergente (divergente).

III. *Soient Σu_n et Σv_n deux séries ; formons la différence*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{v_n}{v_{n+1}}$$

et supposons que cette différence finisse par devenir et rester définitivement nulle ou positive, à partir d'une valeur suffisamment grande de n : 1° Si la série Σv_n converge, la série Σu_n converge aussi ; 2° si la série Σu_n diverge, la série Σv_n diverge aussi.

On a, en effet, par hypothèse, à partir d'une valeur suffisamment grande de n.

$$\frac{u_n}{v_n} \overline{>} \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \overline{>} \frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} \overline{>} \cdots$$

Soit ρ la valeur du premier quotient ; à partir de cette valeur de n, on aura $u_n \overline{<} \rho v_n$ et $v_n \overline{>} (1 : \rho)\, u_n$. Le théorème actuel est donc une conséquence des deux précédents.

323. Formation de séries convergentes et divergentes. — Toute fonction $\varphi(x)$ qui augmente jusqu'à l'infini sans jamais décroître, peut servir à former deux séries à termes positifs, l'une divergente, l'autre convergente.

En effet, la série

$$(1) \qquad \Sigma u_n = \Sigma\,[\varphi(n+1) - \varphi(n)]$$

sera divergente, car la somme des n premiers termes est $\varphi(n+1) - \varphi(1)$ et augmente indéfiniment avec n.

Au contraire, la série

$$(2) \qquad \Sigma u_n = \Sigma \left[\frac{1}{\varphi(n-1)} - \frac{1}{\varphi(n)}\right]$$

sera convergente et aura pour somme $1 : \varphi(0)$.

Réciproquement, toute série peut aussi se mettre sous l'une des deux formes précédentes. En effet, si elle diverge, la somme s_n augmente à l'infini ; on a $u_n = s_n - s_{n-1}$; donc la série se mettra sous la forme (1) en posant $s_n = \varphi(n)$. Si la série converge, le reste R_n tend vers zéro ; on a $u_n = R_{n-1} - R_n$; on mettra donc la série sous la forme (2) en posant $R_n = 1 : \varphi(n)$.

Voici une remarque qui se rattache immédiatement aux considérations précédentes :

Considérons une série divergente $\Sigma(s_n - s_{n-1})$. Multiplions son terme général par la quantité constamment et indéfiniment décroissante $1 : (\sqrt{s_n} + \sqrt{s_{n-1}})$, nous obtenons la série encore divergente

$$\Sigma(\sqrt{s_n} - \sqrt{s_{n-1}}).$$

Considérons une série convergente $\Sigma(R_n - R_{n-1})$. Multiplions son terme général par la quantité constamment et infiniment croissante $1 : (\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n})$, nous obtenons la série encore convergente

$$\Sigma(\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}).$$

De là la conclusion importante que voici :

On peut toujours multiplier les termes successifs d'une série divergente (convergente) par des quantités qui tendent vers zéro (vers l'infini) sans altérer la divergence (la convergence).

Un procédé très général pour étudier la convergence ou la divergence d'une série, consiste à la comparer aux séries (1) et (2), construites avec des fonctions appropriées, et à appliquer les théorèmes du n° précédent.

Comme exemple, nous allons démontrer un théorème dont on trouvera la généralisation plus loin (n° 327). Mais, pour éviter toute complication, nous conviendrons de remplacer par l'unité le logarithme de tout nombre plus petit que la base du système. Voici ce théorème :

324. Théorème. — *Les deux séries*

$$\Sigma \frac{1}{n}, \qquad \Sigma \frac{1}{n\,\mathrm{Log}\,n},$$

sont divergentes. Au contraire, si α est positif, les deux séries

$$\Sigma \frac{1}{n^{1+\alpha}}, \qquad \Sigma \frac{1}{n\,\mathrm{Log}^{1+\alpha} n}$$

sont convergentes, quelque petit que soit α.

Formons d'abord les deux séries divergentes (1) du n° précédent qui correspondent aux deux fonctions $\varphi(x) = \mathrm{Log}\,x$ et $\varphi(x) = \mathrm{Log.\,Log}\,x$. Leurs termes généraux u_n sont

$$\mathrm{Log}(n+1) - \mathrm{Log}\,n, \qquad \mathrm{Log.\,Log}(n+1) - \mathrm{Log.\,Log}\,n$$

et ils se mettent par le théorème des accroissements finis sous la forme $(0 < \theta < 1)$

$$\frac{1}{n+\theta}, \qquad \frac{1}{(n+\theta)\,\mathrm{Log}(n+\theta)},$$

Donc les deux premières séries du théorème, ayant leurs termes respectivement plus grands, sont divergentes.

D'autre part, formons les deux séries convergentes (2) qui correspondent aux fonctions $\varphi(x) = x^{-\alpha}$ et $\varphi(x) = \mathrm{Log}^{-\alpha} x$. Leurs termes généraux u_{n-1} sont

$$(n-1)^{-\alpha} - n^{-\alpha}, \qquad \mathrm{Log}^{-\alpha}(n-1) - \mathrm{Log}^{-\alpha} n$$

et ils se ramènent par la formule des accroissements finis à la forme

$$\frac{\alpha}{(n-\theta)^{1+\alpha}}, \qquad \frac{\alpha}{(n-\theta)\,\mathrm{Log}^{1+\alpha}(n-\theta)}.$$

Les termes généraux des deux dernières séries du théorème se déduisent donc respectivement de ceux-ci en les multipliant respectivement par des facteurs $< 1 : \alpha$. Donc ces séries sont aussi convergentes.

325. Critères de convergence. — Nous appellerons *critère de convergence ou de divergence* toute règle qui permet de décider de la convergence ou de la divergence d'une série par une propriété de son terme général, ou par une relation entre le terme général et un nombre limité de termes suivants.

I. *Critère de Cauchy. — La série Σu_n converge si l'expression*

$$\sqrt[n]{u_n}$$

a une limite < 1 pour n infini, ou, plus généralement, finit par rester inférieure à un nombre $k < 1$ à partir d'une valeur suffisamment grande de n. Elle diverge si cette expression ne finit pas par devenir définitivement plus petite que l'unité.

En effet, dans la première hypothèse, les termes de la série deviennent inférieurs à ceux de même rang de la progression géométrique convergente Σk^n; donc la série converge. Dans la seconde hypothèse, u_n finit par être égal ou supérieur à l'unité. Le terme général n'ayant pas pour limite zéro, la série diverge.

Souvent le quotient $u_n : u_{n+1}$ a une forme plus simple que u_n, alors, le critère précédent étant cependant applicable, il est souvent plus commode de se servir du suivant :

II. *Critère de d'Alembert. — La série Σu_n converge si le quotient*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

finit par rester inférieur à un nombre $k < 1$ à partir d'une valeur suffisamment grande de n. Elle diverge, si ce quotient devient définitivement $=$ ou > 1.

En effet, dans la première hypothèse, on a, à partir d'un terme convenable u_n,

$$u_{n+1} < ku_n, \qquad u_{n+2} < k^2 u_n, \ldots \qquad u_{n+p} < k^p u_n.$$

Donc les termes de la série, commencée à ce terme, sont inférieurs à ceux de même rang de la progression géométrique convergente.

$$u_n + ku_n + \cdots + k^p u_n + \cdots$$

et la série converge.

Dans la seconde hypothèse, u_n cesse de décroître à partir d'un certain indice et, par conséquent, ne peut pas avoir pour limite zéro.

Il arrive souvent que le rapport $u_{n+1} : u_n$ tend vers une limite déterminée k quand n tend vers l'infini. La série sera convergente si k est < 1 et divergente si k est > 1. Si $k = 1$, on ne peut rien conclure et il faut recourir au critère suivant :

III. *La série Σu_n sera convergente, si l'on peut poser, k désignant une constante > 1,*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \frac{k}{n};$$

elle sera divergente, si l'on a, h désignant une constante quelconque,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \overline{\leq} 1 + \frac{1}{n} + \frac{h}{n^2}.$$

Considérons la série convergente (α positif)

$$\Sigma v_n = \Sigma \frac{1}{n \operatorname{Log}^{1+\alpha} n}.$$

Dans celle-ci, on a

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{\operatorname{Log}(n+1)}{\operatorname{Log} n}\right)^{1+\alpha}.$$

Mais on a par la formule des accroissements finis

$$\operatorname{Log}(n+1) = \operatorname{Log} n + \frac{1}{n+\theta},$$

$$\left(\frac{\operatorname{Log}(n+1)}{\operatorname{Log} n}\right)^{1+\alpha} = \left(1 + \frac{1}{(n+\theta)\operatorname{Log} n}\right)^{1+\alpha} = 1 + \frac{\varepsilon}{n \operatorname{Log} n},$$

ε gardant une valeur finie quand n tend vers l'infini. On a donc aussi, la signification générale de ε restant la même,

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{n \operatorname{Log} n}.$$

Si l'on a $u_n : u_{n+1} > 1 + k : n$ et $k > 1$, il viendra donc

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{v_n}{v_{n+1}} > \frac{k-1}{n} - \frac{\varepsilon}{n \operatorname{Log} n}.$$

Comme ε reste fini et que $k - 1$ est positif, cette expression finit par devenir positive quand n tend vers l'infini. Donc la série Σu_n est convergente comme Σv_n (n° 322).

D'autre part, considérons la série divergente

$$\Sigma v_n = \Sigma \frac{1}{n \operatorname{Log} n}.$$

Dans celle-ci, on a

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{\operatorname{Log}(n+1)}{\operatorname{Log} n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{(n+\theta)\operatorname{Log} n}\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} > 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+\theta)\operatorname{Log} n}.$$

Si l'on a

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \overline{\leq} 1 + \frac{1}{n} + \frac{h}{n^2},$$

il viendra

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{1}{(n+\theta)\operatorname{Log} n} - \frac{h}{n^2}.$$

Cette expression finit par devenir positive quand n tend vers l'infini. Donc, la série Σv_n étant divergente, Σu_n l'est aussi (n° 322).

Remarque. Les règles précédentes permettent de décider de la convergence ou de la divergence dans presque tous les cas qui se rencontrent en pratique. En effet, le quotient $u_n : u_{n+1}$ peut généralement se développer suivant les puissances de $1 : n$. On obtient alors un développement de la forme

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\theta}{n^2},$$

où θ conserve une valeur finie.

La série sera convergente si $\alpha > 1$ ou si $\alpha = 1$, $\beta > 1$; divergente, si $\alpha < 1$ ou si $\alpha = 1$, $\beta \overline{\overline{<}} 1$.

326. Théorème de Cauchy. — *Soient $f(x)$ une fonction positive et constamment décroissante et* $F(x)$ *une intégrale de $f(x)$, la série*

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots$$

converge ou diverge suivant que $F(x)$ *reste fini ou augmente indéfiniment quand x tend vers l'infini.*

Considérons en effet, la série suivante à termes positifs

$$\Sigma [F(n+1) - F(n)]$$

qui est convergente ou divergente suivant l'hypothèse du théorème. Par le théorème des accroissements finis, son terme général se met sous la forme

$$f(n+\theta), \qquad (0 < \theta < 1).$$

Ce terme est $> f(n+1)$ et $< f(n)$; donc, selon l'hypothèse du théorème, la série $\Sigma f(n+1)$ sera *a fortiori* convergente, ou la série $\Sigma f(n)$ *a fortiori* divergente. Le théorème est donc démontré.

327. Séries de Bertrand. — Bertrand a formé deux suites comprenant une infinité de séries, les unes convergentes, les autres divergentes, mais de plus en plus lentement.

Posons, en abrégé,

$$L_1 x = \text{Log}\, x, \qquad L_2 x = \text{Log}.\, L_1 x, \;\ldots \qquad L_\mu x = \text{Log}.\, L_{\mu-1} x, \;\ldots$$

Les *logarithmes successifs* de x ainsi définis sont de plus en plus petits. Si x est donné, il y en a un premier $L_\mu x$ qui est négatif et les logarithmes suivants n'ont plus de sens. Mais, afin d'éviter toute difficulté dans ce qui suit, nous conviendrons d'attribuer au symbole $L_\mu x$ l'*unité* pour valeur, quand la définition précédente conduit à une valeur négative ou devient elle-même illusoire.

Tous ces logarithmes croissent constamment jusqu'à l'infini quand x

augmente indéfiniment, mais leur croissance est de plus en plus lente. Leurs dérivées s'obtiennent facilement. On a, de proche en proche,

$$L'_{\mu} x = \frac{L'_{\mu-1} x}{L_{\mu-1} x} = \dots = \frac{1}{x L_1 x L_2 x \dots L_{\mu-1} x}$$

Ces dérivées sont donc des fonctions décroissantes.

Ceci posé, voici le théorème de Bertrand :

Toutes les séries comprises dans la première suite :

$$\Sigma \frac{1}{n L_1 n}, \quad \Sigma \frac{1}{n L_1 n L_2 n}, \quad \Sigma \frac{1}{n L_1 n L_2 n L_3 n}, \quad \dots$$

sont divergentes ; au contraire, toutes les séries comprises dans la seconde suite :

$$\Sigma \frac{1}{n (L_1 n)^{1+\alpha}}, \quad \Sigma \frac{1}{n L_1 n (L_2 n)^{1+\alpha}}, \quad \Sigma \frac{1}{n L_1 n L_2 n (L_3 n)^{1+\alpha}}, \quad \dots$$

sont convergentes, si α est positif, quelque petit que soit.

Toute série de la première suite est de la forme $\Sigma L'_{\mu}$, son terme général étant la dérivée d'une fonction qui croît à l'infini avec n, cette série sera divergente, en vertu du théorème précédent.

Toute série de la seconde suite peut se mettre sous la forme

$$\Sigma \frac{L'_{\mu}(n)}{[L_{\mu}(n)]^{1+\alpha}}.$$

Son terme général est donc la dérivée de la fonction

$$-\frac{1}{\alpha} [L_{\mu}(n)]^{-\alpha},$$

qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Donc, en vertu du théorème de Cauchy, cette série est convergente.

328. Critères logarithmiques de Bertrand. — On peut déduire des séries de Bertrand des critères de convergence, dont ceux du n° 325 ne sont que les cas particuliers les plus simples. Posons

$$\lambda_{\mu} x = x L_1 x L_2 x \dots L_{\mu} x = \frac{L_{\mu} x}{L'_{\mu} x}.$$

En prenant les logarithmes et en dérivant, on trouve

$$\frac{\lambda'_{\mu} x}{\lambda_{\mu} x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\lambda_1 x} + \frac{1}{\lambda_2 x} + \dots + \frac{1}{\lambda_{\mu} x}.$$

Il résulte de là que les deux fonctions λ et λ' d'indice quelconque sont croissantes, tandis que la fonction $\lambda' : \lambda$ est décroissante. On en conclut,

par le théorème des accroissements finis et pour une fonction λ d'indice quelconque,

$$(1) \qquad \frac{\lambda(n+1)}{\lambda n} = 1 + \frac{\lambda'(n+\theta)}{\lambda n} > 1 + \frac{\lambda' n}{\lambda n}$$

$$(2) \qquad \frac{\lambda n}{\lambda(n+1)} = 1 - \frac{\lambda'(n+\theta)}{\lambda(n+1)} > 1 - \frac{\lambda'(n+\theta)}{\lambda(n+\theta)} > 1 - \frac{\lambda' n}{\lambda n}$$

De même, L étant une fonction croissante et L' : L une fonction décroissante,

$$(3) \qquad \frac{Ln}{L(n+1)} > 1 - \frac{L'n}{Ln} = 1 - \frac{1}{\lambda n}$$

Ceci posé, une série divergente quelconque de Bertrand est de la forme $u_n = \Sigma\,(\lambda n)^{-1}$. Donc, pour une série divergente, on a par la relation (1)

$$(4) \qquad \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \frac{\lambda' n}{\lambda n}\cdot$$

Une série convergente quelconque est de la forme ($\alpha > 0$)

$$u_n = \Sigma\,(\lambda n)^{-1}(Ln)^{-\alpha}.$$

On a donc pour une série convergente, par les relations (2) et (3),

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < \left(1 - \frac{\lambda' n}{\lambda n}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{\lambda n}\right)^{-\alpha}$$

et, en développant ces puissances par la formule du binôme, il vient, θ désignant une quantité positive qui reste finie quand n tend vers l'infini,

$$(5) \qquad \frac{u_n}{u_{n+1}} < 1 + \frac{\lambda' n + \alpha}{\lambda n} + \theta\left(\frac{\lambda' n}{\lambda n}\right)^2$$

De ces inégalités résulte la règle suivante :

Une série Σv_n sera divergente si l'on a, à partir d'une valeur suffisamment grande de n,

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \leqq 1 + \frac{\lambda'_\mu n}{\lambda_\mu n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{\lambda_1 n} + \dots + \frac{1}{\lambda_\mu n}\,.$$

Au contraire, elle sera convergente, si l'on a, ρ désignant une constante positive,

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \geqq 1 + \frac{\lambda'_\mu n + \rho}{\lambda_\mu n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{\lambda_1 n} + \dots + \frac{1+\rho}{\lambda_\mu n}\,.$$

Supposons d'abord que la première hypothèse se vérifie ; donnons l'indice μ à λ dans l'inégalité (4) ; il vient

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{v_n}{v_{n+1}} > 0.$$

Donc, comme Σu_n diverge, Σv_n diverge aussi (n° 322.

Si c'est la seconde hypothèse qui a lieu, donnons à α une valeur $< \rho$ et à λ l'indice μ dans l'inégalité (5) ; il vient

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{\rho - \alpha}{\lambda n} - \theta \left(\frac{\lambda' n}{\lambda n}\right)^2.$$

Comme $(\lambda' n : \lambda n)^2$ est de l'ordre de $1 : n^2$, c'est le terme $(\rho - \alpha) : \lambda n$ qui est le terme principal du second membre de cette inégalité. Il finit donc par lui donner son signe qui est positif puisque ρ est $> \alpha$. Donc, Σu_n étant convergente, Σv_n l'est aussi (n° 322).

Remarque. — Il peut se faire que l'on trouve une infinité de valeurs de n pour laquelle $v_n : v_{n+1}$ vérifie la première inégalité et une infinité d'autres pour lesquelles ce rapport satisfait à la seconde. Dans ce cas, on ne peut rien conclure des critères de Bertrand, ils sont *inapplicables*. Il peut aussi arriver que, μ étant donné, aucune des deux inégalités n'a lieu pour n assez grand. Dans ce cas le *critère d'ordre μ est mis en défaut par manque de précision seulement* et l'on peut espérer qu'il s'appliquera en donnant à μ une valeur plus grande. Les critères de Bertrand ne sont évidemment applicables qu'aux séries dont les termes sont constamment décroissants. Il suffit donc de changer l'ordre des termes d'une série à laquelle les critères sont applicables pour les rendre inapplicables. Mais il est moins simple de former des séries pour lesquelles les critères seraient tous mis en défaut par manque de précision. Nous allons voir cependant tout à l'heure que la chose est possible (n° 331).

329. Degrés de convergence ou de divergence. — Pour apprécier la rapidité ou le degré de convergence ou de divergence d'une série, on établit la comparaison avec le mode de croissance d'une fonction. Si une série est divergente, la somme s_n est une fonction $\varphi(n)$ infiniment grande; la rapidité de la divergence se *caractérise* par l'*ordre de grandeur* de $\varphi(n)$ pour n infini.

De même, si une série converge, le reste R_n est une quantité infiniment petite. On posera $R_n = 1 : \varphi(n)$, de sorte que $\varphi(n)$ sera infiniment grand. La rapidité de la convergence s'apprécie par l'ordre de grandeur de φ.

Réciproquement, comme on l'a montré au n° 323, toute fonction φ constamment et indéfiniment croissante peut servir à construire deux séries l'une divergente l'autre convergente, et dont la rapidité de divergence ou de convergence se caractérise par l'ordre de grandeur de cette fonction.

La notion d'ordre de grandeur est essentiellement relative, et le sens qu'il faut attacher aux définitions précédentes se réduit exactement à ce qui suit :

La rapidité de divergence (de convergence) de deux séries caractérisées par deux fonctions φ_1 et φ_2 sera *la même*, si le rapport $\varphi_1 : \varphi_2$ reste compris entre deux limites finies et différentes de zéro. Cette rapidité sera plus grande pour la série (φ_2) que pour la série (φ_1), si le quotient $\varphi_1 : \varphi_2$ tend vers zéro.

Il peut aussi arriver que le quotient $\varphi_1 : \varphi_2$, sans être cependant borné, ne tende ni vers zéro ni vers l'infini ; dans ce cas, les ordres de grandeur de φ_1 et de φ_2 ne sont pas comparables et les degrés de convergence ou de divergence ne le sont pas non plus.

Ces définitions permettent d'énoncer le théorème suivant, dont la démonstration est si simple que nous laisserons au lecteur le soin de la faire lui-même :

Etant données deux séries divergentes (convergentes) Σu_n et Σv_n, si le quotient $u_n : v_n$ tend vers une limite finie et positive pour n infini, ou, plus généralement, reste compris entre deux nombres fixes différents de zéro, les deux séries divergent (convergent) avec la même rapidité. Si, au contraire, $u_n : v_n$ tend vers l'infini (vers zéro), la divergence (convergence) de la série Σu_n est plus rapide que celle de la seconde série.

330. Théorème de P. du Bois-Reymond. Impossibilité de construire une échelle complète de convergence ou de divergence. — *Etant donnée une suite illimitée de [illegible] :*

$$(1) \qquad [illegible] \ \varphi_p, \ldots,$$

[illegible] croissantes avec x, mais dont les ordres de grandeur vont constamment en diminuant, on peut définir une fonction φ de même nature, mais d'un ordre de grandeur encore [illegible] suite précédente.

Faisons croître x à partir de x_0 ; on peut supposer toutes les fonctions positives, car on ne change pas leur ordre de grandeur par l'addition d'une constante. Posons, dans cette hypothèse, $\psi_p = p + \varphi_p$ et considérons la suite de fonctions :

$$(2) \qquad \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_p, \ldots,$$

qui sont encore du même ordre de grandeur que les fonctions de même indice de la suite (1). Pour chaque valeur particulière de x, les termes de la suite (2) vont en croissant à l'infini avec p. Il y a donc un terme minimum. Soit φ la fonction égale à ce minimum pour chaque valeur de x. Cette fonction sera constamment croissante et de plus elle croîtra à l'infini, car elle surpassera p quand $\psi_1, \psi_2 \ldots$ et ψ_{p-1} surpasseront ψ_p. Enfin cette fonction sera d'ordre moins élevé qu'une fonction quelconque ψ_p. En effet, φ est au plus égal à ψ_{p+1} par définition ; on a donc

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi}{\psi_p} \leq \lim_{x=\infty} \frac{\psi_{p+1}}{\psi_p} = 0.$$

Corollaire. — En vertu du parallélisme que nous avons établi au n° précédent entre les séries et les fonctions, *il est donc impossible de construire une suite illimitée de séries à convergences (ou à divergences) de plus en plus lentes, et telle que toute série convergente (ou divergente) donnée, dont le degré de convergence (ou de divergence) soit comparable à ceux des termes de la suite, converge (ou diverge) plus rapidement*

qu'un terme de cette suite. C'est ce qu'on veut exprimer en disant qu'*il est impossible de construire une échelle complète de convergence ou de divergence des séries.*

Le théorème précédent sur les suites de fonctions appelle un complément, dont nous n'avons pas besoin pour le moment, mais qu'il importe de signaler :

Si, au lieu de décroître, les ordres de grandeur des fonctions de la suite (1) *augmentent, on peut aussi construire une fonction* φ *d'un ordre plus élevé que toutes celles de cette suite.*

Posons en général $\psi_p(x) = \varphi_p(x) - \varphi_p(p)$. Remplaçons la suite (1) par la suite

(2') $$\psi_1, \psi_2, \dots \psi_p, \dots$$

Les termes de même indice dans (1) et (2') sont encore du même ordre de grandeur, mais, pour chaque valeur particulière de x, la suite (2') ne contient qu'un nombre limité de termes positifs. Donc il y a un terme maximum. Nous obtiendrons la fonction φ demandée, en prenant φ égal à ce maximum pour chaque valeur de x.

331. Application aux séries de Bertrand. Mise en défaut des critères logarithmiques. — Les deux suites de Bertrand nous donnent l'exemple le plus classique d'une échelle de convergence ou de divergence. Les séries convergentes contiennent un paramètre α, mais, au point de vue qui nous occupe, il n'y a pas d'avantage à maintenir ce paramètre arbitraire et nous pouvons le faire égal à *un*. La généralité de l'échelle n'en est pas réduite, car chaque série convergente où $\alpha = 1$ converge plus rapidement que toutes celles qui précèdent, α restant quelconque. Il est donc possible, en vertu du théorème précédent, de construire des séries à convergence ou à divergence plus lentes que toutes celles de Bertrand.

On peut aussi construire des séries qui mettent en défaut tous les critères logarithmiques à la fois. Nous considérerons seulement le cas de la divergence, car celui de la convergenee se traite de même.

Mettons la $p^{\text{ième}}$ série de Bertrand sous la forme

$$\Sigma(u_n)_p = \Sigma[\varphi_p(n) - \varphi_p(n-1)]$$

et au moyen de la suite $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_p, \dots$ construisons, comme au nº précédent, la suite $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_p, \dots$ et la fonction φ. Je dis que la série divergente, qui a pour terme général

$$v_n = \varphi(n) - \varphi(n-1),$$

mettra en défaut tous les critères logarithmiques. On a, en effet, les indices p, q, r dépendant de n, et puisque φ est le minimum des ψ,

$$\varphi(n) - \varphi(n-1) = \psi_p(n) - \psi_q(n-1) \geq \psi_p(n) - \psi_p(n-1),$$

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = \psi_r(n+1) - \psi_p(n) \leq \psi_p(n+1) - \psi_p(n).$$

Par conséquent,

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \overline{<} \frac{\psi_p(n) - \psi_p(n-1)}{\psi_p(n+1) - \psi_p(n)} = \frac{\varphi_p(n) - \varphi_p(n-1)}{\varphi_p(n+1) - \varphi_p(n)} = \left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)_p.$$

Or p augmente indéfiniment avec n. Donc $v_n : v_{n+1}$ finit par surpasser constamment $u_n : u_{n+1}$ pour toutes les séries de Bertrand. Donc tous les critères logarithmiques, qui reviennent à la condition $\frac{v_n}{v_{n+1}} \overline{>} \frac{u_n}{u_{n+1}}$, sont mis en défaut.

Cette conclusion a un intérêt considérable au point de vue philosophique. Mais il ne faudrait pas en exagérer l'importance pratique. Les critères de Bertrand s'appliquent à toutes les séries qui se sont présentées naturellement dans l'analyse, soit immédiatement, soit après le partage de la série en plusieurs parties. Les autres séries ont été fabriquées artificiellement en vue du but à atteindre.

Exercices.

1. On considère une série divergente $u_1 + u_2 + \cdots$ et une fonction $f(x)$ non croissante et tendant vers zéro pour x infini. Soient s_n la somme des n premiers termes de la série et $F(x)$ une intégrale de la fonction. On forme les deux séries

$$\Sigma f(s_n) u_n, \qquad \Sigma f(s_{n-1}) u_n.$$

Montrer : que la première converge si $F(x)$ est bornée pour x infini ; que la seconde diverge si $F(x)$ croît indéfiniment ; qu'elles convergent ou divergent en même temps si u_n est borné.

R. Démonstration analogue à celle du théorème de Cauchy (n° 326).

2. Cas particuliers du théorème précédent : Si α est positif et u_n borné,

$$\Sigma \frac{u_n}{s_n} \text{ diverge}, \qquad \Sigma \frac{u_n}{s_n^{1+\alpha}} \text{ converge}.$$

3. On considère une série convergente $u_1 + u_2 + \cdots$ et une fonction $f(x)$ qui augmente à l'infini sans décroître quand x tend vers 0. Soient $R_n = u_{n+1} + \cdots$ le reste de la série et $F(x)$ une intégrale de $f(x)$. On forme les deux séries

$$\Sigma f(R_n) u_n, \qquad \Sigma f(R_{n-1}) u_n.$$

La première diverge si $F(x)$ est infinie pour $x = 0$; la seconde converge si $F(x)$ est bornée pour $x = 0$.

4. Cas particuliers du théorème précédent : Si α est positif,

$$\Sigma \frac{u_n}{R_n} \text{ diverge}, \qquad \Sigma \frac{u_n}{R_{n-1}^{1-\alpha}} \text{ converge}.$$

5. Soit $\varphi(x)$ une fonction qui croît constamment jusqu'à l'infini avec x. Quelque petit que soit l'ordre de grandeur de $\varphi(x)$, on peut construire deux séries Σu_n et Σv_n, la première convergente, la seconde divergente, et telles que l'on ait $v_n : u_n < \varphi(n)$.

R. On forme les deux séries ayant pour termes généraux

$$v_n = \sqrt{\varphi(n+1)} - \sqrt{\varphi(n)}, \qquad u_n = \sqrt{\frac{1}{\varphi(n-1)}} - \sqrt{\frac{1}{\varphi(n)}}.$$

Ces deux séries répondent à la question.

6. Si u_n est constamment décroissant, la condition $\lim nu_n = 0$ est *nécessaire* pour que la série Σu_n soit convergente.

R. On considère l'inégalité

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} > pu_{n+p}$$

et on applique le caractère général de convergence.

§ 3. Séries semi-convergentes.

332. Théorème. — *Lorsqu'une série réelle est semi-convergente, les termes positifs d'une part et les termes négatifs changés de signe d'autre part, forment séparément deux séries divergentes à termes positifs.*

Soient s_n la somme des n premiers termes de la série, s'_n et $-s''_n$ respectivement les sommes des termes positifs et des termes négatifs qui entrent dans s_n. On aura

$$s_n = s'_n - s''_n.$$

Soit σ_n la somme des valeurs absolues des termes de s_n, on aura aussi

$$\sigma_n = s'_n + s''_n.$$

Quand n tend vers l'infini, s_n conserve une valeur finie, car la série proposée est convergente par hypothèse, et σ_n tend vers l'infini car la convergence n'est pas absolue. Donc les deux sommes s'_n et s''_n tendent vers l'infini et c'est ce qu'énonce le théorème.

333. Théorème. — *Lorsqu'une série à termes complexes est semi-convergente, la série des parties réelles est convergente ainsi que la série des parties imaginaires, mais l'une d'elles au moins est semi-convergente.*

Considérons la série de quantités complexes

$$\Sigma u_n = \Sigma(a_n + b_n i).$$

La série Σu_n tendant vers une limite $A + Bi$, les séries Σa_n et Σb_n tendent vers A et vers B et sont convergentes. On a donc

$$\Sigma u_n = \Sigma a_n + i\Sigma b_n.$$

Si les deux séries $\Sigma \mid a_n \mid$ et $i\Sigma \mid b_n \mid$ étaient absolument conver-

gentes, leur somme le serait aussi (n° 319, II). Donc l'une de ces deux séries doit être semi-convergente.

334. **Théorème.** — *Une série $s = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots$ dont les termes sont réels et alternativement positifs et négatifs, converge si ces termes vont constamment en décroissant en valeur absolue et ont pour limite zéro. Le reste de la série est de même signe et moindre en valeur absolue que le premier terme négligé.*

On a, en effet,

$$s_{2n} = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \cdots + (\alpha_{2n-1} - \alpha_{2n})$$
$$s_{2n+1} = \alpha_1 - (\alpha_2 - \alpha_3) - \cdots - (\alpha_{2n} - \alpha_{2n+1})$$

Toutes les différences entre parenthèses sont positives. Donc s_{2n} est une somme croissante et s_{2n+1} une somme décroissante. Leur différence tend vers zéro. Donc elles tendent toutes deux vers la même limite et cette limite est intermédiaire entre les sommes paires et les sommes impaires. Appliquons cette conclusion à la série

$$R_n = \pm [\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} + \cdots];$$

on voit que R_n a le signe de son premier terme et est moindre que lui en valeur absolue.

335. **Théorème.** — *Soient $s = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ une série convergente à termes réels ou complexes, s_n la somme de ses n premiers termes et S une limite supérieure de $| s_n |$. Soient ensuite $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \dots$ une suite de quantités positives décroissantes, ayant par conséquent une limite α, la série*

$$\sigma = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n + \dots$$

converge et a une somme σ de module moindre que $S\alpha_1$.

Soit σ_n la somme des n premiers termes de cette dernière série. On a, puisque $u_n = s_n - s_{n-1}$,

$$\sigma_n = s_1 \alpha_1 + (s_2 - s_1) \alpha_1 + \dots + (s_n - s_{n-1}) \alpha_n$$

et on en tire

$$\sigma_n - s_n \alpha_n = s_1 (\alpha_1 - \alpha_2) + s_2 (\alpha_2 - \alpha_3) + \dots + s_n (\alpha_{n-1} - \alpha_n)$$

Quand n tend vers l'infini, le second membre de cette équation a une limite déterminée, car la série qui a pour terme général $s_n (\alpha_{n-1} - \alpha_n)$ est absolument convergente. Celle-ci a, en effet, des termes de modules moindres que les termes correspondants de la série positive convergente

$$S (\alpha_1 - \alpha_2) + S (\alpha_2 - \alpha_3) + \dots = S (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots) = S(\alpha_1 - \alpha).$$

Donc $\sigma_n - s_n \alpha_n$ a une limite déterminée et le module de cette limite sera $< S (\alpha_1 - \alpha)$.

Comme, d'autre part, $s_n \alpha_n$ tend vers $s\alpha$, σ_n tend vers une limite déterminée σ et l'on a

$$| \sigma | < | s\alpha | + S(\alpha_1 - \alpha) < S\alpha + S(\alpha_1 - \alpha) = S\alpha_1.$$

Remarque. — La convergence de la série (σ) subsiste même quand Σu_n diverge, pourvu : 1° que $| s_n |$ ait toujours une limite supérieure S, 2° que α_n ait pour limite 0.

En effet, la différence $\sigma_n - s_n \alpha_n$ a une limite déterminée comme dans le cas précédent. Ensuite $| s_n \alpha_n |$ qui est $<$ $S\alpha$ a pour limite 0 (même si s_n ne converge pas). Donc σ_n a une limite déterminée σ.

336. Théorème. — *La somme d'une série semi-convergente à termes réels, dépend de l'ordre de ces termes. En modifiant cet ordre, on peut faire tendre la série vers le nombre que l'on veut.*

Formons deux séries l'une avec termes positifs et l'autre avec les termes négatifs de la série proposée. Supposons que ces séries (a) et (b) soient

$$(a) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots,$$
$$(b) \qquad - b_1 - b_2 - b_3 - \qquad - b_n - \ldots$$

Ces deux séries sont divergentes (n° 332) et a_n ainsi que b_n ont pour limite zéro quand n tend vers l'infini.

Ceci posé, nous allons montrer qu'on peut intercaler les termes négatifs entre les termes positifs, de manière à former une série ayant pour somme un nombre quelconque, par exemple un nombre positif M.

A cet effet, prenons dans la série positive le nombre de termes strictement nécessaires pour que leur somme surpasse M, ajoutons ensuite des termes négatifs jusqu'à ce que la somme soit ramenée en-dessous de M, puis des termes positifs jusqu'à ce que la somme surpasse de nouveau M, et ainsi de suite, sans jamais prendre plus de termes qu'il ne faut. On alternera ainsi indéfiniment les termes positifs et les termes négatifs, car les deux séries sont infinies, et, par conséquent, tous les termes des deux séries seront employés. Je dis que la nouvelle série (c) ainsi formée a pour somme M.

En effet, considérons la différence $s'_m - M$ entre M et la somme des m premiers termes de la série (c). Cette différence change un nombre infini de fois de signe. Si elle est positive, elle est inférieure au dernier terme a_n qui y entre, et si elle est négative, au dernier terme b_n. Donc cette somme tend vers zéro. car a_n et b_n tendent vers zéro quand le nombre des termes pris dans chacune des séries (a) ou (b) augmente indéfiniment.

Remarque. — Si la série semi-convergente est à termes complexes, sa partie réelle ou sa partie imaginaire est semi-convergente (n° 333). On pourra donc modifier l'ordre des termes de manière à donner une valeur arbitraire soit à sa partie réelle soit à sa partie imaginaire.

337. Multiplication. — *Soient* $s = \Sigma u_n$ *et* $s' = \Sigma v_n$ *deux séries convergentes à termes réels ou complexes, dont la première au moins soit absolument convergente. Formons la série* $s'' = \Sigma w_n$ *dont le terme général*

$$w_n = u_n v_1 + u_{n-1} v_2 + \ldots u_1 v_n$$

renferme toutes les combinaisons de deux indices dont la somme est $(n+1)$. *Cette série converge et a pour somme* ss'.

Désignons par r_n le module de u_n, la série Σr_n sera convergente par hypothèse et aura une somme finie σ. Soient respectivement s_n, s'_n, s''_n et σ_n les sommes des n premiers termes de chacune des séries (u), (v), (w) et (r).

Considérons la différence $s_n s'_n - s''_n$. On peut la mettre sous la forme

$$\begin{aligned} & u_2 v_n + u_3 (v_{n-1} + v_n) + \ldots + u_n (v_2 + v_3 + \ldots + v_n) \\ = & u_2 (s'_n - s'_{n-1}) + u_3 (s'_n - s'_{n-2}) + \ldots + u_n (s'_n - s'_1) \end{aligned}$$

Soit $n = p + q$ une décomposition de n en deux parties. Nous pouvons partager la somme précédente en deux parties correspondantes, que nous écrirons chacune sur une ligne

$$\begin{aligned} & u_2 (s'_n - s'_{n-1}) + u_3 (s'_n - s'_{n-2}) + \ldots + u_{p+1} (s'_n - s'_q) \\ & + u_{p+2} (s'_n - s'_{q-1}) + \ldots \qquad \ldots + u_n (s'_n - s'_1). \end{aligned}$$

On peut supposer q assez grand pour que toutes les parenthèses de la première ligne aient leur module moindre qu'un nombre donné ε si petit qu'il soit. Alors la somme de la première ligne a son module moindre que

$$\varepsilon (r_2 + r_3 + \ldots + r_{p+1}) < \varepsilon \sigma_{p+1} < \varepsilon \sigma$$

Cette somme est donc aussi petite qu'on veut avec ε.

Les parenthèses de la seconde ligne ont leurs modules moindres qu'un nombre fixe A, car la série (v) est convergente. La somme de la seconde ligne a donc son module moindre que

$$A (r_{p+2} + r_{p+3} + \ldots + r_{p+q}) < A (\sigma_{p+q} - \sigma_p)$$

Cette somme a donc pour limite zéro quand p tend vers l'infini.

En résumé, la différence $s_n s'_n - s''_n$ se compose de deux parties qui ont pour limite zéro quand p et q tendent vers l'infini. Comme on peut faire tendre p et q vers l'infini avec n, il vient donc

$$\lim s''_n = \lim s_n s'_n = ss'.$$

Remarque. — Le théorème précédent ne subsiste pas en général quand les deux séries Σu_n et Σv_n sont semi-convergentes. Toutefois, si la série Σw_n converge, elle a encore pour somme le produit des deux précédentes comme on le montrera plus loin (nº ~~[illegible]~~).
350

§ 4. Séries de fonctions.

338. Convergence uniforme. — Considérons d'abord une série réelle

$$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

dont les termes sont des fonctions d'une variable réelle x. Si la série converge pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle (a, b), la somme s de la série sera une fonction de x.

Soit ε un nombre positif donné aussi petit que l'on veut. Pour chaque valeur déterminée de x, la condition

$$(1) \qquad | s - s_n | < \varepsilon$$

se vérifiera pour tous les indices n supérieurs à un nombre fixe N, car cette condition sert de définition à s. Mais, si on laisse x variable, il peut se faire que ce nombre N dépende nécessairement de x.

Si, quelque petit que soit ε, la condition (1) *peut se vérifier pour tous les indices n supérieurs à un nombre N indépendant de x et pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle (a, b), on dit que la série converge uniformément dans cet intervalle.*

Cette définition s'étend d'elle-même au cas où les termes de la série seraient des fonctions de plusieurs variables $x, y, \ldots$ Si l'on peut attribuer à ces variables une infinité de systèmes de valeurs différents, on dira que la convergence est *uniforme*, si la condition (1) se vérifie à la fois pour tous les systèmes admissibles de valeurs, quand l'indice n est supérieur à un nombre N indépendant des variables.

Enfin, les termes de la série peuvent aussi être fonctions d'une variable complexe z et nous entendons par là que ces termes ont des valeurs déterminées pour chaque valeur de z. Supposons que la série converge pour un système déterminé de valeurs de z en nombre infini, par exemple pour toutes les valeurs comprises dans un cercle, on dira que la convergence est uniforme, si la condition (1) a lieu à partir d'un nombre N indépendant de z.

339. Exemples de séries à convergence non-uniforme. — On peut former facilement des séries qui convergent pour toutes les valeurs de x dans un certain intervalle, mais non uniformément. En voici deux exemples remarquables :

I. Considérons d'abord la progression géométrique de raison $(1-x)$

$$s = x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \cdots + x(1-x)^n + \cdots$$

Cette progression converge pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $(0, 1)$. Si x est > 0, la raison est plus petite que 1 et la progression a pour somme l'unité. Si $x = 0$, tous les termes sont nuls et la série a pour somme zéro. Donc s est une *fonction discontinue de x*, car s passe de 0 à 1, quand x passe de 0 à une valeur positive si petite qu'elle soit.

Cette série n'est pas uniformément convergente.

En effet, pour les valeurs positives de x, on a

$$R_n = x(1-x)^n[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots] = (1-x)^n.$$

Donc, si n est constant, on a, quel que soit n,

$$\lim_{x=0} R_n = 1.$$

Il est donc impossible de satisfaire à la condition $R_n < \varepsilon < 1$ pour une valeur de n indépendante de x.

II. Considérons, en second lieu, la série

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} x\,[n^2 e^{-nx} - (n-1)^2 e^{-(n-1)x}].$$

On a, pour toute valeur positive de x,

$$s_n = xn^2e^{-nx}, \qquad \text{d'où} \qquad s = x \lim \frac{n^2}{e^{nx}} = 0,$$

car une exponentielle est infiniment grande par rapport à une puissance.

Pour $x = 0$, on a $s_n = 0$ et $s = 0$.

Donc la série converge et l'on a $s = 0$ pour toute valeur nulle ou positive de x. Mais cette série ne converge pas uniformément. En effet,

$$R_n = s - s_n = -xn^2e^{-nx}.$$

Si l'on pose $x = 1 : n$, x tend vers 0 quand n tend vers l'infini et le reste pris en valeur absolue

$$|\,R_n\,| = \frac{n}{e}$$

augmente indéfiniment avec n. Donc la convergence ne peut être uniforme dans un intervalle $(0, b)$ comprenant le point 0.

340. Théorème. — *La série de fonctions $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ sera uniformément convergente si les modules de ses termes ne peuvent jamais surpasser les termes de même rang d'une série convergente à termes constants et positifs.*

Il est clair que, dans ce cas, le reste de la série de fonctions a un

module moindre que le reste de la série à termes constants. Le reste R_n de celle-ci peut être supposé $< \varepsilon$. Donc, en prenant n termes ou davantage dans la série de fonctions, le reste aura son module également $< \varepsilon$. Donc la série converge uniformément.

341. Propriétés des séries uniformément convergentes. — I. *Si les termes d'une série uniformément convergente sont des fonctions continues, la somme de la série est une fonction continue.*

Posons $s = s_n + R_n$ et désignons par Δs, Δs_n et ΔR_n les accroissements de ces trois quantités pour un système déterminé d'accroissements de la ou des variables. On aura

$$\Delta s = \Delta s_n + \Delta R_n = \Delta s_n + (R_n + \Delta R_n) - R_n.$$

Nous allons montrer que les trois termes dans lesquels on a décomposé Δs peuvent être supposés aussi petits qu'on veut avec les accroissements des variables. En effet, la convergence étant uniforme, on peut prendre n assez grand pour que les deux restes $| R_n |$ et $| R_n + \Delta R_n |$ soient plus petits qu'un nombre positif ε donné d'avance si petit qu'il soit. Cela fait, s_n, qui est la somme d'un nombre limité de fonctions continues, est une fonction continue. Donc on peut rendre sa variation absolue $< \varepsilon$, en rendant celles des variables suffisamment petites. Donc, la variation $| \Delta s |$ sera $< 3\,\varepsilon$, quantité arbitrairement petite. Donc s est une fonction continue.

Quand la convergence n'est pas uniforme, la continuité de la somme n'est pas une conséquence de celle des termes de la série. Nous en avons vu la preuve au n° 339 par un exemple très simple : $\Sigma x\,(1 - x)^n$.

II. *Si les termes d'une série réelle, uniformément convergente, sont des fonctions intégrables d'une variable réelle x dans l'intervalle (a, b), la somme de la série est elle-même intégrable et son intégrale peut s'obtenir par décomposition, en intégrant chaque terme de la série.*

Considérons, en effet, la série

$$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = s_n + R_n,$$

on aura

$$\int_a^b s\,dx = \int_a^b s_n\,dx + \int_a^b R_n\,dx.$$

Faisons tendre n vers l'infini ; la convergence étant uniforme,

$|R_n|$ devient inférieur à tout nombre positif ε si petit qu'il soit, quand n tend vers l'infini. Or, on a, dans ce cas,

$$\left|\int_a^b R_n\,dx\right| < \varepsilon\,(b-a)$$

Cette intégrale tend donc vers zéro quand n tend vers l'infini. Il vient ainsi

$$\int_a^b s\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b s_n\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \cdots$$

Quand la convergence n'est pas uniforme, l'intégration terme à terme n'est plus légitime. Nous allons le montrer par un exemple.

Reprenons la série, considérée précédemment (n° 339),

$$s = \Sigma\, x\,[n^2 e^{-nx} - (n-1)^2\, e^{-(n-1)x}] = 0,$$

dans laquelle x est nul ou positif. On a évidemment

$$\int_0^1 s\,dx = 0.$$

Mais l'intégration terme à terme conduit à un résultat différent du précédent. On a, en effet,

$$s_n = x\,n^2 e^{-nx}$$

Si l'on intègre terme à terme, la série obtenue aura pour somme

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 s_n\,dx = \lim \int_0^1 nx\,e^{-nx}\,n dx = \int_0^\infty t e^{-t}\,dt = 1,$$

tandis que l'intégrale de s est nulle.

III. *Si les termes d'une série convergente sont des fonctions d'une variable réelle x ayant des dérivées continues, et si la série de ces dérivées converge uniformément dans un intervalle (a, b), la somme de la série des dérivées est la dérivée de la somme de la série primitive.*

Soient en effet $s = \Sigma u_n$ la série primitive et $\sigma = \Sigma u'_n$ la série dérivée. Faisons varier x de a à b, on aura, en vertu du théorème précédent,

$$\int_a^x \sigma\,dx = \Sigma \int_a^x u'_n\,dx = \Sigma\,[u_n - (u_n)_a],$$

l'indice a signifiant qu'il faut faire $x = a$ dans la fonction entre parenthèses. Comme la série primitive converge par hypothèse, le résultat précédent peut se mettre sous la forme

$$\int_a^x \sigma\,dx = \Sigma u_n - \Sigma\,(u_n)_a = s - (s)_a,$$

et, en égalant les dérivées des deux membres par rapport à x, on trouve $\sigma = s'$ comme le veut le théorème.

342. Fonction continue de Weierstrass : 1° sans dérivée ; 2° ayant une infinité de maxima et de minima dans tout intervalle ; 3° n'étant à variation bornée dans aucun intervalle — Les séries uniformément convergentes conservent quelques-unes des propriétés des sommes d'un nombre limité de termes. Mais il ne faut pas généraliser cette conclusion. Considérons, en effet, la fonction de Weierstrass

$$F(x) = \sum_0^\infty a^n \cos b^n \pi x,$$

où a est un nombre positif < 1 et b un entier impair > 1. Cette série converge uniformément, car ses termes ne surpassent pas ceux de même rang dans la progression convergente Σa^n. Si ab est < 1, $F(x)$ a pour dérivée la série

$$F'(x) = -\pi \sum_0^\infty (ab)^n \sin b^n \pi x,$$

car cette nouvelle série converge uniformément.

1° *Si ab surpasse une certaine limite que nous allons indiquer*, $F(x)$ *n'a plus de dérivée* (Weierstrass).

Soit α_k l'entier le plus voisin de $b^k x$ et ξ_k une fraction comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$; on peut écrire

$$b^k x = \alpha_k + \xi_k .$$

Posons, e_k désignant $+1$ ou -1 à volonté,

$$b^k (x + h) = \alpha_k + e_k , \qquad \text{d'où} \qquad h = \frac{e_k - \xi_k}{b^k} ;$$

h aura le signe de e_k et son module sera compris entre $1 : 2b^k$ et $3 : 2b^k$. Donc h tend vers zéro si k tend vers l'infini.

Considérons maintenant la différence

$$F(x+h) - F(x) = \sum_0^\infty a^n [\cos b^n \pi (x+h) - \cos b^n \pi x]$$

$$= -\pi \Sigma a^n b^n \int_x^{x+h} \sin (b^n \pi t)\, dt ;$$

nous allons la décomposer en deux parties S_k et R_k en sommant séparément les k premiers termes puis les termes suivants.

Chaque intégrale de x à $x+h$ ayant son module moindre que celui de h, on aura

$$| S_k | < \pi \, | h | \, (1 - ab + a^2 b^2 + \cdots + a^{k-1} b^{k-1}) < | h | \frac{\pi}{ab - 1} (ab)^k .$$

On a, d'autre part,

$$R_k = \sum_k^\infty a^n [\cos b^n \pi (x+h) - \cos b^n \pi x].$$

On a, dans cette somme, b et e_k étant impairs,

$$\cos b^n (x+h)\pi = \cos b^{n-k} (\alpha_k + e_k)\pi = (-1)^{\alpha_k+1}$$

$$\cos b^n x\pi = \cos b^{n-k} (\alpha_k + \xi_k)\pi = (-1)^{\alpha_k} \cos b^{n-k}\xi_k \pi.$$

Il vient donc

$$R_k = (-1)^{\alpha_k+1} \sum_k^{\infty} a^n (1 + \cos b^{n-k}\xi_k \pi).$$

Toutes les parenthèses étant positives, le second membre a le signe de $(-1)^{\alpha_k+1}$ et une valeur absolue plus grande que son premier terme. Donc, μ désignant un nombre > 1, on peut écrire

$$R_k = (-1)^{\alpha_k+1} \mu a^k = (-1)^{\alpha_k+1} \mu h \frac{a^k}{h}.$$

Enfin h a le signe de e_k et un module moindre que $3 : 2b^k$, on peut encore écrire, μ étant un nouveau nombre > 1,

$$R_k = (-1)^{\alpha_k+1} e_k h \frac{2}{3} \mu (ab)^k.$$

Si l'on a donc

$$\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab-1}, \qquad \text{d'où} \qquad ab > 1 + \frac{3\pi}{2},$$

le module de R_k surpasse celui de S_k et c'est R_k qui donne son signe à la somme $S_k + R_k$. On peut donc encore écrire, μ désignant seulement un nombre > 1,

$$F(x+h) - F(x) = \mu h e_k (-1)^{\alpha_k+1} \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right)(ab)^k.$$

On tire de là

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\right| > \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right)(ab)^k.$$

Ce quotient croît donc infiniment quand k tend vers l'infini et, par suite, h vers zéro. D'ailleurs ce quotient a le signe de $e_k(-1)^{\alpha_k+1}$ et on peut lui donner le signe que l'on veut en disposant de celui de e_k, on peut donc le faire tendre à volonté vers l'infini positif ou négatif, h tendant toujours vers zéro.

Cet exemple prouve qu'*il existe des fonctions continues n'ayant de dérivée pour aucune valeur de la variable.*

2° *Dans le cas qui précède, la fonction* $F(x)$ *a une infinité de maxima et de minima dans tout intervalle.*

En effet, il existe dans tout intervalle une infinité de valeurs de x de la forme

$$x = \frac{p}{b^q}$$

où p et q sont entiers. Je dis que, quel que soit le nombre positif q, *toute valeur paire de* p *donne un maximum* et *toute valeur impaire un minimum.*

En effet, reprenons la démonstration précédente en donnant à x une valeur semblable. Dès que h sera $=$ ou $>$ q, on aura $b^k x = b^{k-q} p$. Donc $b_k x$ est un entier de même parité que p et $(-1)^{\alpha_k+1}$ peut être remplacé par $(-1)^{p+1}$. Par suite, le quotient

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

a le signe de e_k (donc celui de h) si p est impair, et le signe contraire si p est pair.

Donc, si p est impair, ce quotient tend vers $+\infty$ pour h positif et vers $-\infty$ pour h négatif, x est un *minimum* de $F(x)$. Si p est pair, l'inverse a lieu, x est un *maximum* de $F(x)$.

Cet exemple prouve qu'*il existe des fonctions continues qui ne sont ni constamment croissantes ni constamment décroissantes dans aucun intervalle, si petit qu'il soit.*

3° *La fonction* $F(x)$, *sous les mêmes conditions que ci-dessus, n'est à variation bornée dans aucun intervalle.* (C. Jordan.).

Considérons un intervalle (x_1, X). Donnons-nous un entier k et déterminons une suite de valeurs :

$$x_2 = x_1 + h_1, \qquad x_3 = x_2 + h_2, \ldots \qquad x_{i+1} = x_i + h_i, \ldots,$$

en calculant de proche en proche h_i au moyen de x_i comme nous avons calculé h au moyen de x précédemment. Nous ferons seulement toujours $e_k = 1$ pour que h soit positif. Comme h est compris entre $1 : 2b^k$ et $3 : 2b^k$, et par conséquent, ne peut tendre vers zéro, il y aura une dernière ordonnée $x_n < X$, à laquelle nous nous arrêterons.

La variation absolue de $F(x)$ entre x_i et x_{i+1} surpasse, comme on l'a vu tout à l'heure,

$$h_i \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right)(ab)^k.$$

Donc la somme de toutes ces variations de x_i à x_n surpasse

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right)(ab)^k \Sigma h_i > \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right)(ab)^k (X - x_1 - h_n).$$

Si l'on fait tendre k vers l'infini, toutes les quantités h_i tendent vers zéro, et la quantité précédente augmente à l'infini, car ab est > 1. Donc $F(x)$ a une variation illimitée entre x_1 et X.

Cet exemple prouve qu'il *existe des courbes continues* $y = F(x)$ *qui ne sont pas rectifiables (ou dont l'arc est infini) entre deux quelconques de leurs points, quelque rapprochés qu'on les suppose.*

§ 5. Séries potentielles.

343. Définition. — Les séries potentielles sont celles qui sont ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle ou complexe $(z-a)$. Elles sont de la forme

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$

En posant $z - a = x$, elles prennent la forme

(1) $$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \Sigma a_nx^n.$$

C'est sous cette forme que nous allons les étudier. Ces séries jouissent de propriétés qui leur sont propres et elles ont une importance exceptionnelle.

Dans les démonstrations suivantes, nous désignerons en général par r le module de x et par $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ ceux de $a_0, a_1, \ldots a_n$.

344. Cercle de convergence. — Considérons la suite des quantités

$$\rho_1 = \alpha_1, \qquad \rho_2 = \sqrt{\alpha_2}, \ldots \qquad \rho_n = \sqrt[n]{\alpha_n}, \ldots$$

Trois cas peuvent se présenter :

1° ρ_n a pour limite 0 quand n tend vers l'infini. Dans ce cas, la série $\Sigma\alpha_nr^n$ converge pour toute valeur de r en vertu du critère de Cauchy (n° 325) car on a, quel que soit r,

$$\lim \sqrt[n]{\alpha_nr^n} = \lim r\rho_n = 0.$$

Donc la série Σa^nx^n est absolument convergente pour toute valeur réelle ou complexe de x. On dit, dans ce cas, que la série (1) est *une fonction entière* de x.

2° ρ_n peut surpasser tout nombre assignable. Dans ce cas, la série Σa^nx^n diverge pour toute valeur de x autre que zéro, car le module de son terme général $(\rho_nr)^n$ n'a pas pour limite zéro pour n infini.

3° Si aucune de ces deux hypothèses ne se présente, il existe des nombres positifs que ρ_n peut surpasser pour une infinité de valeurs de n, mais ceux-ci ont une limite supérieure que l'on peut désigner par $1 : R$.

La série $\Sigma\alpha_nr^n$ converge, si $r < R$.

En effet, soit $R - \varepsilon$ un nombre compris entre r et R : ρ_n ne peut surpasser $1 : (R - \varepsilon)$ (qui est $> 1 : R$) que pour un nombre limité de valeurs de n. On aura donc à partir d'une valeur suffisamment grande de n

$$\rho_n < \frac{1}{R - \varepsilon}, \qquad \text{d'où} \qquad \sqrt[n]{\alpha_nr^n} = \rho_nr < \frac{r}{R - \varepsilon} < 1$$

et la série converge en vertu du critère de Cauchy.

Donc, pour toute valeur de x dont le module est $< R$, c'est-à-dire pour toute valeur réelle ou complexe de x située dans un cercle de rayon R autour de l'origine, la série Σa_nx^n est *absolument convergente*.

Au contraire, si x tombe en dehors de ce cercle, c'est-à dire à son module $>$ R, la série sera *divergente.*

En effet, soit $R + \varepsilon$ un nombre compris entre R et r, ρ_n surpasse un nombre infini de fois $1 : (R + \varepsilon)$. On a donc, pour une infinité de valeurs de n

$$\sqrt[n]{\alpha_n r^n} = \rho_n r > \frac{r}{R + \varepsilon} > 1$$

et le terme général $a_n x^n$ ne peut avoir pour limite zéro.

Le cercle de rayon R que nous venons de définir s'appelle le *cercle de convergence,* parce que la série $\Sigma a_n x^n$ converge à l'intérieur et diverge à l'extérieur. Sur la circonférence elle même, il y a doute, la série converge ou diverge suivant le cas.

345. Théorème. — *Une série potentielle converge uniformément dans tout cercle de rayon* $\rho < R$ *décrit autour de l'origine, et elle a, par conséquent, pour somme une fonction continue de* x *dans ce cercle.*

En effet, la série à termes constants et positifs $\Sigma \alpha_n \rho^n$ est convergente par hypothèse, puisque $\rho < R$. Les modules des termes de la série $\Sigma a_n x^n$ ne peuvent surpasser les termes correspondants de la série précédente dans le cercle de rayon ρ. Donc cette série converge uniformément (n° 340).

346. Fonctions analytiques. — A l'intérieur du cercle de convergence, une série potentielle définit donc une fonction de la variable complexe x. Les fonctions qui peuvent être ainsi définies par des séries potentielles, portent le nom de *fonctions analytiques.* Ce sont les plus importantes, mais leur étude ne sera approfondie que dans la seconde partie du cours.

La *dérivée* $f'(x)$ d'une fonction analytique $f(x)$ est par définition, la limite du quotient

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

quand h tend vers zéro par une suite de valeurs réelles ou complexes quelconques. Le théorème suivant prouve l'existence de la dérivée pour toute fonction analytique :

347. Théorème. — *Soit* $f(x) = \Sigma a_n x^n$ *une série convergente dans un cercle de rayon* R ; *la série dérivée* $\Sigma n a_n x^{n-1}$ *sera convergente dans le même cercle que la première et aura pour somme* $f'(x)$.

Soit x un point quelconque situé dans le cercle de convergence. Considérons la série convergente à termes positifs

$$F(r) = \Sigma\alpha_n r^n.$$

Donnons à r un accroissement positif δ, assez petit pour que $r + \delta$ soit encore $< R$. La série $F(r + \delta)$ sera encore convergente et l'on aura

$$\frac{F(r+\delta) - F(r)}{\delta} = \Sigma\alpha_n \frac{(r+\delta)^n - r^n}{\delta}$$

$$(1) \qquad = \Sigma\alpha_n \left[nr^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \delta r^{n-2} + \dots \right].$$

Donnons à x un accroissement variable, réel ou complexe, h et formons l'expression analogue à la précédente

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \Sigma a_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$(2) \qquad = \Sigma a_n \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} hx^{n-2} + \dots \right].$$

La comparaison des séries (**1**) et (**2**) montre immédiatement que, si $|h|$ est $< \delta$, tous les termes de la série (**2**) ont leurs modules moindres que les termes de la série (**1**) qui sont constants et positifs. Donc, si h tend vers zéro, la série (**2**) converge uniformément (n° 340) et est fonction continue de h (n° 341). Sa limite pour $h = 0$ se confond avec sa valeur pour $h = 0$. En faisant tendre h vers zéro, l'équation (**2**) donne donc, à la limite,

$$f'(x) = \Sigma na_n x^{n-1}.$$

348. Théorème d'Abel. — *Si la série $\Sigma a_n x^n$ converge pour une valeur réelle x_1 de x, elle converge uniformément dans l'intervalle* $(0, x_1)$ *et elle a pour somme une fonction continue de x dans cet intervalle.*

Le reste R_n n'est autre chose que la série.

$$R_n = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots$$

La série proposée étant convergente, par hypothèse, pour $x = x_1$, à tout nombre positif ε donné, si petit qu'il soit, correspond un entier N assez grand pour que la condition

$$| a_n x_1^n + a_{n+1} x_1^{n+1} + \dots + a_{n+p} x_1^{n+p} | < \varepsilon$$

ait lieu, quel que soit p, pourvu que n soit $>$ N.

D'autre part, si l'on a $0 < x < x_1$, la suite

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^n, \quad \left(\frac{x}{x_1}\right)^{n+1}, \dots \quad \left(\frac{x}{x_1}\right)^{n+p}$$

est stationnaire ou décroissante. Donc la série

$$a_n x_1^n \left(\frac{x}{x_1}\right)^n + a_{n+1} x_1^{n+1} \left(\frac{x}{x_1}\right)^{n+1} + \ldots = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots$$

est convergente (nº 335) et a une somme $< \varepsilon \left(\frac{x}{x_1}\right)^n$ et *a fortiori* $< \varepsilon$.

On a donc $| R_n | < \varepsilon$, quel que soit x. Donc la série proposée converge uniformément dans l'intervalle $(0, x_1)$.

349. Sur l'emploi du théorème précédent. — Le théorème d'Abel sert le plus souvent à étendre aux points de la circonférence du cercle de convergence des relations établies dans l'intérieur seulement de ce cercle.

Supposons qu'on ait, dans l'intérieur du cercle,

$$f(x) = \Sigma a_n x^n$$

et que $f(x)$ soit continue en un point X de la circonférence. La relation précédente subsistera au point X, *pourvu que la série converge en ce point.*

Soit, en effet, r une variable réelle comprise entre 0 et 1 ; on a, par hypothèse,

$$f(rX) = \Sigma (a_n X^n) r^n.$$

Faisons tendre r vers l'unité ; on aura, en vertu du théorème d'Abel,

$$f(X) = \Sigma a_n X^n.$$

350. Application à la multiplication des séries. — Considérons deux séries convergentes à termes réels ou complexes

$$s = \Sigma u_n, \qquad s' = \Sigma v_n.$$

Formons la série $s'' = \Sigma w_n$, dont le terme général est

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1.$$

Si la série Σw_n converge, elle a pour somme ss'.

En effet, les deux séries

$$\varphi(x) = \Sigma u_n x^n, \qquad \psi(x) = \Sigma v_n x^n,$$

sont convergentes pour $x = 1$. Donc leur rayon de convergence est au moins égal à 1 et elles sont *absolument convergentes* si $| x |$ est $<$ 1. On a donc, sans difficulté si $| x |$ est < 1 (nº 320, IV),

$$\varphi(x) \psi(x) = \Sigma w_n x^{n+1}.$$

Faisons tendre x vers l'unité. On aura, par le théorème d'Abel,

$$\lim \varphi(x) = s, \qquad \lim \psi(x) = s', \qquad \lim \Sigma w_n x^{n+1} = \Sigma w_n = s''.$$

Donc $s'' = ss'$.

351. Théorème. Série illimitée de Maclaurin. — *Une fonction réelle ou complexe ne peut être développée en série potentielle que d'une seule manière.*

En effet, soit $f(x)$ la somme d'une série potentielle, convergente dans un cercle de rayon R :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

En dérivant successivement, il vient

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots,$$
$$f''(x) = 2a_2 + 2.3a_3x + \dots,$$
$$f'''(x) = 2.3a_3 + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Posant $x = 0$ dans ces équations, on en tire successivement

$$a_0 = f(0), \qquad a_1 = f'(0), \qquad a_2 = \frac{f''(0)}{1.2}, \qquad a_3 = \frac{f'''(0)}{1.2.3.}\dots$$

Donc tous les coefficients de la série sont complètement déterminés.

En substituant ces valeurs dans la série, il vient

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \dots$$

C'est la *série illimitée de Maclaurin*. Nous retrouvons donc par une autre voie la loi de formation des coefficients successifs que nous avons reconnue au n° 88. Tandis que nous avons raisonné là sur des expressions composées d'un nombre limité de termes, nous avons raisonné ici sur des sommes prolongées à l'infini. Mais tandis que, les variables étant réelles, la formule limitée du n° 88 ne suppose rien que l'existence des dérivées de $f(x)$, celle que nous venons d'obtenir n'est nullement démontrée pour une fonction $f(x)$ quelconque. Elle ne l'est que *pourvu que le développement soit possible.*

352. Nouvelles expressions du terme complémentaire dans la formule de Maclaurin. — Le procédé qui se présente immédiatement à l'esprit pour reconnaître si une fonction $f(x)$ d'une variable réelle peut s'exprimer en série potentielle, consiste à la développer par la formule limitée de Maclaurin et à vérifier si *le terme complémentaire* tend vers zéro quand le nombre n des termes augmente indéfiniment. S'il en est ainsi, en faisant tendre n vers l'infini, on obtiendra l'expression de $f(x)$ en série illimitée.

Ceci nous amène à chercher une nouvelle forme, plus générale, du *terme complémentaire* ou du *reste*. Nous allons l'obtenir en nous servant du calcul intégral.

Soit $f(x)$ une fonction, continue ainsi que toutes ses dérivées, d'une variable réelle x. En faisant une première intégration par parties, on a

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(x-t)dt = xf'(0) + \int_0^x f''(x-t)tdt.$$

On peut faire une nouvelle intégration par parties portant sur tdt, et continuer ainsi de suite, en faisant toujours porter l'intégration sur la puissance de t. Après $n-1$ intégrations par parties consécutives, on obtient la formule

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n \\ R_n &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f^{(n)}(x-t)t^{n-1}dt. \end{aligned}\right.$$

C'est la formule limitée de Maclaurin avec l'*expression exacte du reste*. Si l'on fait le changement de variables $t = x(1-u)$, le reste R_n s'écrit aussi

$$(2)\qquad R_n = \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(ux)(1-u)^{n-1}du.$$

Au moyen du théorème de la moyenne, on peut obtenir des expressions plus simples du reste, mais qui ont l'inconvénient de renfermer une quantité inconnue θ comprise entre 0 et 1. Si l'on fait sortir $f^{(n)}(ux)$ du signe d'intégration, on trouve

$$R_n = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x).$$

C'est l'expression connue (n° 88).

§ 6. Développement des fonctions en séries potentielles. Discussion du reste (variables réelles).

353. Considérations générales. — Lorsqu'on se propose de développer en séries potentielles des fonctions qui dépendent d'une variable complexe, il existe des principes généraux qui permettent de supprimer ou à peu près toute discussion. Ces principes seront exposés dans le second volume. Pour le moment, nous considérerons exclusivement les variables réelles. Pour obtenir le développement de $f(x)$ en série potentielle, le procédé le plus élémentaire consiste à passer de la formule limitée de Maclaurin à la formule illimitée en faisant tendre n vers l'infini.

Il faut démontrer que le *terme complémentaire* R_n tend vers zéro. C'est à cela que servent les expressions générales de ce terme que nous avons fait connaître au n° précédent. Mais la discussion est loin d'être toujours facile sur ces expressions générales. Elle est simple pour les fonctions e^x, $\sin x$, $\cos x$. Elle l'est déjà moins pour les autres fonctions élémentaires, et pour les fonctions plus compliquées, elle est le plus souvent impraticable.

Heureusement, pour la plupart des fonctions, on peut trouver des expressions particulières de R_n, non comprises dans les formules générales, et qui se prêtent à une discussion plus facile. C'est ce que nous nous proposons surtout de faire dans le paragraphe actuel.

A côté du procédé qui consiste à passer de la série limitée à la série illimitée, il y en a un autre, infiniment plus riche en ressources. On pose *a priori* la série illimitée et on démontre directement au moyen de ses propriétés particulières qu'elle a pour somme $f(x)$. Ce procédé est moins élémentaire que le premier, mais, pour en faire saisir la portée, nous commencerons par l'appliquer aux fonctions e^x, $\sin x$ et $\cos x$.

354. Fonction exponentielle. — Considérons la série

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

En vertu du critère de d'Alembert (n° 325), cette série est absolument convergente pour toute valeur de x. En effet, le module de $u_{n+1} : u_n$ est égal à $|\,x\,| : n$ et tend vers zéro avec $1 : n$, quel que soit x. Cette série jouit de la propriété de se reproduire par dérivation et l'on a $f(0) = 1$. Ces deux propriétés suffisent pour montrer que la série a pour somme e^x. On a, en effet,

$$\text{D}.\ f(x)e^{-x} = [f'(x) - f(x)]e^{-x} = 0.$$

Donc $f(x)e^{-x}$ est une constante. Faisant $x = 0$, on voit que cette constante est 1. Donc $f(x) = e^x$.

355. Fonctions circulaires. — Considérons les deux séries, dont la seconde est la dérivée de la première,

$$\varphi(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad \varphi'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

Elles convergent pour toute valeur de x comme la précédente, et l'on a

$$\varphi''(x) = -\varphi(x), \qquad \varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(0) = 1.$$

Je dis qu'il en résulte $\varphi(x) = \sin x$.

Il suffit de remarquer que l'on aura nécessairement

$$\varphi(x)\cos x - \varphi'(x)\sin x = 0, \qquad \varphi(x)\sin x + \varphi'(x)\cos x = 1.$$

En effet, les premiers membres sont des constantes, car leurs dérivées s'annulent en vertu des propriétés de φ. En faisant $x = 0$, on voit que ces constantes sont 0 et 1. On tire alors des deux équations précédentes $\varphi(x) = \sin x$ et $\varphi'(x) = \cos x$.

356. Séries logarithmiques. — Pour développer Log $(1+x)$, nous chercherons une expression particulière du reste R_n. Pour cela, nous partirons de l'identité

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1-(-x)^n+(-x)^n}{1-(-x)}=\sum_0^{n-1}(-x)^k+\frac{(-x)^n}{1+x}.$$

Intégrons les deux membres de 0 à x, ce qui suppose $x>-1$; l'intégrale du dernier terme sera R_n. Il vient ainsi

$$(1)\qquad \text{Log}\,(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n.$$

Nous nous servirons du théorème de la moyenne pour simplifier R_n ; nous pouvons écrire ainsi

$$R_n=(-1)^n\int_0^x\frac{x^n\,dx}{1+x}=\frac{(-1)^n}{1+\theta x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1},\qquad (0<\theta<1).$$

Donc R_n tend vers 0, si $|x|$ est <1 ou si $x=1$. Pour $x=-1$ la série devient Σn^{-1} et diverge. Donc le rayon de convergence de la série (1) est égal à l'unité.

La fonction Log $(1+x)$ est donc exprimable en série illimitée de Maclaurin si l'on a $-1<x\leqq 1$, et la série illimitée diverge dans les autres cas.

Faisant $x=1$, on obtient la série semi-convergente

$$\text{Log}\,2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots$$

Le développement de Log $\frac{1+x}{1-x}$ peut se déduire de celui de Log $(1+x)$. On peut aussi l'obtenir par un raisonnement analogue au précédent. On a

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1-x^{2n}+x^{2n}}{1-x^2}=\sum_0^{n-1}x^{2k}+\frac{x^{2n}}{1-x^2}.$$

On multiplie par 2 et on intègre de 0 à x ; il vient

$$(2)\qquad \text{Log}\,\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right]+R_n$$

$$R_n=2\int_0^x\frac{x^{2n}\,dx}{1-x^2}=\frac{2}{1-\theta x^2}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

et R_n tend vers 0 si x est compris entre -1 et $+1$. Dans les autres cas, la série infinie diverge.

C'est la série (2) qu'on applique au calcul des logarithmes des nombres entiers. Faisons

$$x=\frac{p-q}{p+q},\qquad \text{d'où}\qquad \frac{p}{q}=\frac{1+x}{1-x},$$

et choisissons les entiers p et q de manière que $|x|$ soit < 1. On aura

$$\text{Log}\, p = \text{Log}\, q + 2\left[\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^5 + \cdots\right]$$

Cette formule suffit pour le calcul des logarithmes des nombres entiers, car elle ramène le calcul du logarithme de p à celui du logarithme d'un nombre entier inférieur q et le logarithme de 1 est connu. En particulier, si $p = 2$, $q = 1$, il vient

$$\text{Log}\, 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{3^5} + \cdots\right].$$

Cette série est à convergence rapide et convient beaucoup mieux au calcul de Log2 que la première qui converge très lentement.

357. Développement de l'Arc tangente. — Ce développement s'obtient comme le précédent. Partons de l'identité

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1-(-x^2)^n + (-x^2)^n}{1-(-x^2)} = \sum_0^{n-1} (-x^2)^k + \frac{(-x^2)^n}{1+x^2}$$

Intégrons-la de 0 à x ; il vient $(0 < \theta < 1)$

$$(3) \qquad \text{arc tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \text{R}_n$$

$$\text{R}_n = (-1)^n \int_0^x \frac{x^{2n}\, dx}{1+x^2} = \frac{(-1)^n}{1+\theta x^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Le reste est inférieur au premier terme négligé ; il tend vers 0, si $|x|$ ne surpasse pas l'unité. Donc arc tg x est représenté par la série illimitée si x varie entre 0 et 1, limites comprises. Le rayon de convergence est égal à l'unité, car c'est celui de la série dérivée $\Sigma\, (-x^2)^n$.

En particulier, pour $x = 1$, on trouve la formule de Leibnitz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Calcul de π. — La série (3) peut servir au calcul de π de la manière suivante. On calcule d'abord l'arc φ dont la tangente est $1:5$. La formule donne

$$\varphi = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 + \cdots$$

On a ensuite

$$\text{tg}\, 2\varphi = \frac{2\,\text{tg}\,\varphi}{1-\text{tg}^2\varphi} = \frac{5}{12}, \qquad \text{tg}\, 4\varphi = \frac{2\,\text{tg}^2\varphi}{1-\text{tg}^2 2\varphi} = \frac{120}{119},$$

d'où

$$\operatorname{tg}\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4\varphi - 1}{1 + \operatorname{tg} 4\varphi} = \frac{1}{239}$$

On conclut de là, par la formule (**3**),

$$4\varphi - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5 - \cdots$$

On obtient ainsi la formule de *Machin*

$$\pi = 16\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots\right] - 4\left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \cdots\right] = 3{,}1415926\ldots$$

358. Convergence de la série du binôme. — Si m est égal à 0 ou à un entier positif, on sait par l'algèbre que $(1 + x)^m$ peut se développer en un polynôme ordonné suivant les puissances de x. Laissons ce cas de côté. Soit m un nombre positif non entier ou un nombre négatif. Considérons la série illimitée

$$\sum_1^\infty u_n = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n + \cdots,$$

où les coefficients sont formés comme ceux du binôme

$$C_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 . 2 \ldots n};$$

aucun de ces coefficients ne sera nul.

Le rayon de convergence de la série est égal à l'unité, car on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{C_n}{C_{n-1}} x = \frac{m-n+1}{n} x = -\left(1 - \frac{m+1}{n}\right) x.$$

Ce rapport a pour limite $-x$ pour n infini, donc la série est absolument convergente si $|x| < 1$ et elle diverge si $|x| > 1$ (nº 325).

Si $x = +1$ ou -1, la discussion est plus difficile. On voit de suite que $m + 1$ doit être positif pour que les termes décroissent. C'est donc une première condition nécessaire pour la convergence. Quand elle est remplie, les termes décroissent constamment. Si $x = 1$, $u_{n+1} : u_n$ devient négatif quand n surpasse $m + 1$, et les termes deviennent alternativement positifs et négatifs. Si $x = -1$, les termes finissent, au contraire, par devenir tous de même signe. Nous utiliserons cette remarque tout à l'heure.

Pour résoudre la question de la convergence, il faut étudier la loi de décroissance des coefficients quand $m + 1$ est positif.

A cet effet, observons que, d'après la règle de l'Hospital, les rapports

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m+1+\varepsilon} - 1}{\frac{m+1}{n}} \quad \text{et} \quad \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m+1-\varepsilon} - 1}{\frac{m+1}{n}}$$

ont respectivement pour limites, quand n tend vers l'infini, les deux quantités :

$$-1-\frac{\varepsilon}{m+1} \quad \text{et} \quad -1+\frac{\varepsilon}{m+1},$$

dont la première est <-1 et la seconde >-1 quand ε est positif. Donc, quelque petit que soit le nombre positif ε, on aura, à partir d'une certaine valeur de n,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1+\varepsilon} < 1-\frac{m+1}{n} < \left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1-\varepsilon},$$

ce qu'on peut écrire

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m+1+\varepsilon} < \left|\frac{C_n}{C_{n-1}}\right| < \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m+1-\varepsilon}$$

Changeons n en $n+1$, $n+2$, ... $n+p$ et multiplions tous les résultats. Il vient

$$\left(\frac{n}{n+p}\right)^{m+1+\varepsilon} < \left|\frac{C_{n+p}}{C_n}\right| < \left(\frac{n}{n+p}\right)^{m+1-\varepsilon}$$

Donc, quelque petit que soit ε, le produit $(n+p)^{m+1+\varepsilon} \mid C_{n+p} \mid$ reste supérieur, quelque soit p, au nombre positif fixe $n^{m+1+\varepsilon} \mid C_n \mid$, et le produit $(n+p)^{m+1-\varepsilon} \mid C_{n+p} \mid$ inférieur au nombre positif fixe $n^{m+1-\varepsilon} \mid C_n \mid$. On peut donc trouver deux constantes positives A et B telles qu'on ait, quel que soit n,

$$\left| C_n \right| > \frac{A}{n^{1+m+\varepsilon}} \qquad \left| C_n \right| < \frac{B}{n^{1+m-\varepsilon}}$$

Si m est négatif, $m+\varepsilon$ peut aussi être supposé négatif en prenant ε assez petit ; la première inégalité montre que la série $\Sigma \mid C_n \mid$ a ses termes supérieurs à ceux d'une série divergente (n° 324) et cette série est divergente.

Si m est positif, $m-\varepsilon$ peut être supposé positif également ; la seconde inégalité montre que la série $\Sigma \mid C_n \mid$ est convergente. De plus, dans ce cas, le produit nC_n tend vers zéro, car sa valeur absolue ne surpasse pas la quantité $B : n^{m-\varepsilon}$ qui tend vers zéro.

Donc, si m est compris entre -1 et 0, la série du binôme ne peut être que *semi-convergente* quand $\mid x \mid = 1$. Si $x=-1$, ce n'est pas le cas, car, comme nous l'avons fait remarquer tout à l'heure, tous les termes deviennent finalement de même signe. Mais elle sera semi-convergente si $x=1$, car les termes finissent par devenir à signes alternés et de plus constamment et indéfiniment décroissants (n° 334).

En résumé, nous avons obtenu pour la série du binôme les résultats suivants :

A) La série sera *absolument convergente* : 1° dans tous les cas, si $| x | < 1$; 2° Si $x = \pm 1$, pourvu que m soit positif.

B) La série sera *semi-convergente* si $x = 1$, m étant compris entre 0 et — 1.

C) La série sera *divergente* dans tous les autres cas.

359. Sommation de la série du binôme. — Il est facile de trouver la somme de la série du binôme dans tous les cas de convergence. Soit $f(x)$ la somme des n premiers termes

$$f(x) = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_{n-1} x^{n-1}.$$

En observant que deux coefficients consécutifs satisfont à la condition

$$nC_n - (m - n + 1)\, C_{n-1} = 0,$$

on vérifie de suite l'identité

$$mf(x) - (1 + x)\, f'(x) = (m - n + 1)\, C_{n-1} x^{n-1} = nC_n x^{n-1}.$$

En vertu de cette identité, on a

$$\mathrm{D}\,\frac{f(x)}{(1+x)^m} = \frac{(1 + x)\, f'(x) - mf(x)}{(1 + x)^{m+1}} = -\frac{nC_n x^{n-1}}{(1 + x)^{m+1}}$$

et, en intégrant de 0 à x (ce qui suppose $x > -1$, si $m > 0$),

$$\frac{f(x)}{(1 + x)^m} - 1 = - nC_n \int_0^x \frac{x^{n-1}\, dx}{(1 + x)^{m+1}}.$$

On peut aussi écrire, en changeant la variable d'intégration x en tx,

$$(4) \qquad \frac{f(x)}{(1+x)^m} - 1 = - nC_n x^n \int_0^1 \frac{t^{n-1} dt}{(1+tx)^{m+1}}.$$

En remplaçant $f(x)$ par sa valeur, on tire des deux formules précédentes

$$(5) \qquad \begin{cases} (1 + x)^m = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_{n-1} x^{n-1} + R_n \\ R_n = nC_n (1 + x)^m \displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}\, dt}{(1 + t)^{m+1}}. \end{cases}$$

ou bien

$$(6) \qquad R_n = nC_n x^n (1 + x)^m \int_0^1 \frac{t^{n-1}\, dt}{(1 + tx)^{m+1}}.$$

On obtient des expressions simplifiées de R_n, en faisant sortir du signe $\int$, au moyen du théorème de la moyenne, un des deux termes de la fraction. La formule (**5**) donne ainsi $(0 < \theta < 1)$

$$(7) \qquad R_n = C_n x^n \frac{(1 + x)^m}{(1+\theta x)^{m+1}} = nC_n\, (\theta x)^{n-1} \frac{1 - (1 + x)^m}{m}.$$

Ces deux dernières expressions montrent que *la série a pour somme* $(1+x)^m$ *dans tous les cas de convergence.*

En effet, la première montre que R_n tend vers zéro avec le premier terme négligé $C_n x^n$ pour toute valeur de $x > -1$. La seconde qui subsiste à la limite quand x tend vers -1, montre que R_n tend vers zéro avec nC_n dans tous les cas de convergence où $x = -1$, car m doit être positif pour que la série converge.

360. Cas particuliers de la formule du binôme. — I. Si l'on a $x = -1$ et $m > 0$, l'expression (5) de R_n prend la forme $0 . \infty$, ce qui permet de se débarrasser du signe d'intégration. On fait tendre x vers -1 et l'on applique la règle de l'Hospital à l'expression mise sous la forme $\infty : \infty$. On trouve

$$(8) \qquad R_n = n\,C_n \lim \frac{\int_0^x (1+x)^{-m-1} x^{n-1}\,dx}{(1+x)^{-m}} = n\,C_n \frac{(-1)^n}{m}.$$

II. Si m est compris entre 0 et -1 et $x > -1$, la formule (6) conduit à une expression très simple du reste. En effet, $m+1$ étant négatif, on augmente l'intégrale en y remplaçant x par -1 et sa valeur s'obtient alors immédiatement en posant $x = -1$ dans l'équation (4). Il vient

$$\int_0^1 \frac{t^{n-1}\,dt}{(1+tx)^{m+1}} < \int_0^1 \frac{t^{n-1}\,dt}{(1-t)^{m+1}} = \frac{(-1)^n}{nC_n}.$$

Portant cette limite dans (6), on obtient la formule, utile surtout si x est négatif,

$$(9) \qquad R_n = \theta\,(-x)^n\,(1+x)^m, \qquad (0 < \theta < 1).$$

Cette formule suppose donc m négatif et > -1.

361. Développement de l'Arc sinus. — Remplaçant x par $-x^2$, faisant $m = -1:2$ dans la formule du binôme, et prenant la valeur (9) du reste, il vient

$$(10) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_1^{n-1} |\,C_k\,|\,x^{2k} + \frac{\theta\,x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}$$

et, en désignant par $k!!$ le produit des entiers non supérieurs à k et de même parité que k (n° 218), on a

$$|\,C_k\,| = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$

Intégrons l'équation (10) de 0 à x ; il vient

$$(11) \qquad \text{arc sin}\,x = x + \sum_1^{n-1} |\,C_k\,| \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \theta \int_0^x \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

ce qui montre que l'arc sinus est développable pour toutes valeurs de x entre -1 et $+1$. Mais le développement reste légitime à ces limites, car, si $x = 1$, on a (nº 219)

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} = |\,C_n\,|\,\frac{\pi}{2}.$$

et $(m+1) = \frac{1}{2}$ étant positif, cette quantité tend vers 0 avec C_n.

On peut donc faire $x = 1$ et on trouve la série :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_1^\infty \frac{|\,C_k\,|}{k+1}.$$

362. Développements en séries des intégrales elliptiques complètes (nº 295). — Soit k^2 une quantité < 1; en remplaçant x par $k\sin\varphi$ dans la formule (**10**), il vient

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}k^4\sin^4\varphi + \dots$$

Cette série converge uniformément dans tout intervalle en vertu du théorème du nº 340, car elle converge si $\sin\varphi = 1$, ce qui rend tous les termes maximum. Intégrons donc cette série de 0 à $\frac{\pi}{2}$, il viendra

$$F_1(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 \dots\right]$$

Cette série converge très rapidement, si k est petit.

D'autre part, en remplaçant x par $-k^2\sin^2\varphi$ dans le développement de $\sqrt{1+x}$, on trouve la série, uniformément convergente pour toute valeur de φ,

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi - \frac{1.1}{2.4}k^4\sin^4\varphi - \frac{1.1.3}{2.4.6}k^6\sin^6\varphi - \cdots$$

et, en intégrant de 0 à $\pi : 2$,

$$E_1(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \cdots\right]$$

Si k est petit, cette formule se prête aussi au calcul.

§ 7 Fonctions entières élémentaires. Exponentielles imaginaires.

363. Définitions. Formules d'Euler. — Nous savons (nº 351 et 352) que, z étant réel, on a

$$(1) \quad e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ces séries convergent pour toutes les valeurs réelles ou complexes de z. Ce sont donc des fonctions entières (n° 344). Il est naturel de conserver, pour représenter ces fonctions, les mêmes symboles dans le cas où la variable est complexe que dans celui où la variable est réelle. Nous prendrons donc les équations (1) comme définitions de e^z, $\sin z$ et $\cos z$ pour toutes les valeurs réelles ou complexes de z.

On vérifie immédiatement que l'on a

$$(2) \qquad \cos(-z) = \cos z, \qquad \sin(-z) = -\sin z.$$

On constate ensuite directement que l'on a

$$(3) \qquad e^{zi} = \cos z + i \sin z, \qquad \text{d'où} \qquad e^{-zi} = \cos z - i \sin z.$$

De là *les formules fondamentales d'Euler*

$$(4) \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{zi} + e^{-zi}\right), \quad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{zi} - e^{-zi}\right),$$

qui ramènent les fonctions circulaires à la fonction exponentielle.

364. Généralisation des propriétés fonctionnelles de l'exponentielle et des fonctions circulaires. — En dérivant les séries (1), on obtient immédiatement

$$(5) \qquad \mathrm{D}.\, e^z = e^z, \qquad \mathrm{D}.\cos z = -\sin z, \qquad \mathrm{D} \sin z = \cos z.$$

Ce sont les mêmes formules que quand z est réel.

Les règles de dérivation des fonctions composées subsistent sans difficulté quand les variables sont complexes, car la définition générale de la dérivée est la même que quand les variables sont réelles.

Remplaçons, dans la série e^z, z par la somme $z + z'$ de deux quantités complexes. On peut ordonner la série ainsi obtenue suivant les puissances de z. En effet, quand on a remplacé toutes les puissances de $(z + z')$ par leurs développements, la série demeure absolument convergente. Elle converge effectivement quand on remplace z' et z' par leurs modules r et r', ce qui donne une série à termes positifs. Or, dans une série absolument convergente, l'ordre des termes est indifférent (n° 320).

Le développement de $e^{z+z'}$ suivant les puissances de z est donné par la formule de Maclaurin. Comme toutes les dérivées sont égales à $e^{z'}$ pour $z = 0$, il vient

$$(6) \qquad e^{z+z'} = e^{z'}\left(1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \cdots\right) = e^z e^{z'}.$$

Donc toutes les propriétés fonctionnelles de l'exponentielle réelle s'étendent à l'exponentielle imaginaire, car elles se déduisent de l'équation précédente avec la condition $e^0 = 1$.

On peut maintenant vérifier l'exactitude des équations

$$(7)\qquad \begin{aligned} \sin(z+z') &= \sin z \cos z' + \cos z \sin z', \\ \cos(z+z') &= \cos z \cos z' - \sin z \sin z', \end{aligned}$$

en remplaçant les sinus et cosinus par leurs expressions (4) et en tenant compte de l'équation (6).

Donc toutes les propriétés fonctionnelles des lignes trigonométriques réelles s'étendent aux lignes trigonométriques imaginaires, car elles se déduisent des précédentes en y joignant les équations (4) et les conditions

$$\sin 0 = 0, \qquad \cos 0 = 1, \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

365. Décomposition des fonctions précédentes en leurs parties réelles et imaginaires. — Soit $z = x + yi$, x et y étant réels. Il vient, par les équations (5) et (2),

$$(8)\qquad e^z = e^{x+yi} = e^x\, e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Cette formule montre que e^z a pour module e^x et pour argument y. Comme e^x ne peut s'annuler x étant réel, *e^z ne peut s'annuler pour aucune valeur réelle ou complexe de z.*

L'équation (8) montre que *e^z est une fonction périodique de période* $2\pi i$, c'est-à-dire, que, si k est entier, on a

$$(9)\qquad e^{z+2k\pi i} = e^z.$$

Réciproquement, si l'on a $e^{\alpha+z} = e^{\alpha}$, z sera un multiple de $2\pi i$. En effet, cette équation donne

$$e^{\alpha}(e^z - 1) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad e^z = 1, \qquad e^x(\cos y + i \sin y) = 1,$$

d'où $x = 0$ et $y = 2k\pi$.

Les équations (7) et (3) donnent maintenant

$$\begin{aligned} \sin(x+yi) &= \sin x \cos yi + \cos x \sin yi \\ &= \sin x\,\frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \cos x\,\frac{e^y - e^{-y}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(x+yi) &= \cos x \cos yi - \sin x \sin yi \\ &= \cos x\,\frac{e^y + e^{-y}}{2} - i \sin x\,\frac{e^y - e^{-y}}{2}. \end{aligned}$$

Les modules du sinus et du cosinus se déduisent de là. On a

$$\begin{aligned} |\sin^2 z| &= \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 \sin^2 x + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 \cos^2 x \\ &= \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 + \sin^2 x, \end{aligned}$$

$$|\cos^2 z| = \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 \cos^2 x + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 \sin^2 x$$

$$= \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 + \cos^2 x.$$

Ces formules montrent que le sinus et le cosinus ne peuvent s'annuler que si $y = 0$. Donc toutes les racines de ces fonctions sont réelles et, par conséquent, elles sont connues.

366. Fonctions hyperboliques. — On appelle *sinus* et *cosinus hyperboliques* les deux fonctions

$$(10) \quad \mathrm{Sh}\,z = \frac{\sin iz}{i} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \mathrm{Ch}\,z = \cos zi = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Ces fonctions ont pour dérivées

$$\mathrm{D.\,Sh}\,z = \mathrm{Ch}\,z \qquad \mathrm{D.\,Ch}\,z = \mathrm{Sh}\,z.$$

Elles satisfont à toute une série de formules analogues à celles de la trigonométrie ordinaire. La *trigonométrie hyperbolique* n'est pas distincte de la trigonométrie ordinaire. A toute formule de celle-ci correspond une formule de la première, qui s'obtient en rendant les variables purement imaginaires. En vertu des formules (**10**), le principe de transformation est celui-ci :

Toute formule de la trigonométrie du cercle en donne une de la trigonométrie hyperbolique en y remplaçant $\cos z$ *par* $\mathrm{Ch}\,z$ *et* $\sin z$ *par* $i\,\mathrm{Sh}\,z$.

Bien entendu, cette règle ne s'applique qu'aux fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$. Ainsi, on tire des formules (**7**)

$$\mathrm{Sh}(z + z') = \mathrm{Sh}\,z\,\mathrm{Ch}\,z' + \mathrm{Ch}\,z\,\mathrm{Sh}\,z', \qquad \mathrm{Ch}(z + z') = \mathrm{Ch}\,z\,\mathrm{Ch}\,z' + \mathrm{Sh}\,z\,\mathrm{Sh}\,z',$$

et la relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ donne

$$\mathrm{Ch}^2 z - \mathrm{Sh}^2 z = 1.$$

Les fonctions étudiées dans les numéros précédents sont les plus simples des fonctions d'une variable complexe. La théorie générale de ces fonctions sera exposée dans le second volume.

